Diseño de bloques completos Aleatorizados

Jhon Jairo Padilla Aguilar, PhD.

Introducción

- Factor perturbador:
  - Factor del diseño que probablemente tenga un efecto sobre la respuesta, pero no existe un interés específico en él
- Factor Perturbador Desconocido y no controlable:
  - Puede tener niveles variables mientras se está realizando el experimento
  - Una forma de protegerse contra estos factores perturbadores es la aleatorización.
- Factor Perturbador conocido pero no controlable:
  - Si por lo menos, puede observarse el valor que asume el factor perturbador en cada corrida del experimento, puede hacerse la compensación correspondiente mediante el uso de análisis de covarianza (no la estudiaremos en este curso)
- Factor perturbador conocido y controlable:
  - Puede usarse una técnica conocida como formación de bloques para eliminar de manera sistemática su efecto.

Formación de bloques

- Técnica de diseño importante
- Se utiliza ampliamente en la experimentación industrial

Ejemplo:

- Quiere determinarse si cuatro puntas diferentes producen o no lecturas diferentes en una máquina para probar la dureza.
- La máquina funciona presionando la punta en un ejemplar de prueba de metal
- Por la profundidad de la depresión resultante puede determinarse la dureza del ejemplar
- El experimentador ha decidido obtener cuatro observaciones para cada punta
- Hay un solo factor: el tipo de punta
- Un diseño completamente aleatorizado de un solo factor consistiría en asignar al azar cada una de las 4x4=16 corridas a una unidad experimental (ejemplar de prueba de metal) y observar qué resulta de la lectura de la dureza.
- Se requieren 16 ejemplares de prueba de metal (uno por cada corrida del diseño)

Ejemplo (Continuación)

- Problema para esta situación:
  - Si los ejemplares de prueba de metal difieren ligeramente en sus durezas (podría ocurrir si los lingotes se produjeron a temperaturas diferentes),
  - Las unidades experimentales (ejemplares de prueba) contribuirán a la variabilidad observada en los datos de la dureza
  - Como resultado, el error experimental reflejará tanto el error aleatorio, como la variabilidad entre los ejemplares de la prueba.
- El objetivo del diseño debería ser hacer el error experimental tan pequeño como fuera posible: eliminar del error experimental la variabilidad de los ejemplares de prueba.
- Se requiere que el experimentador pruebe cada punta una vez en cada uno de los cuatro ejemplares de prueba

Ejemplo (continuación)

- Diseño de bloques completos aleatorizados (RCBD, randomized complete block design)
- Completo: cada bloque (ejemplar de prueba) contiene todos los tratamientos (Puntas)
- Los bloques o ejemplares de prueba forman una unidad experimental más homogénea en la cual comparar las puntas

Tabla 4-1 Diseño de bloques completos aleatorizados para el experimento de la prueba de la dureza

Tipo de punta	Ejemplar de prueba 1	2	3	4
1	9.3	9.4	9.6	10.0
2	9.4	9.3	9.8	9.9
3	9.2	9.4	9.5	9.7
4	9.7	9.6	10.0	10.2

Ejemplo (Continuación)

- Esta estrategia de diseño mejora la precisión de las comparaciones entre las puntas al eliminar la variabilidad entre los ejemplares de prueba
- Dentro de un bloque, el orden en que se prueban las cuatro puntas se determina aleatoriamente

Aplicaciones del RCBD

- Es uno de los diseños experimentales más utilizados
- Es apropiado en un amplio número de situaciones
- Un caso de aplicación es en las unidades de equipo o maquinaria de prueba (que son diferentes entre sí)
- Otros factores:
  - Lotes de materia prima
  - Personas
  - Tiempo
- Son fuentes de variabilidad perturbadora comunes en un experimento que pueden controlarse de manera sistemática mediante la formación de bloques

Aplicaciones del RCBD

- La conformación de bloques puede ser útil en situaciones que no incluyen necesariamente factores perturbadores
- Puede haber un conjunto de factores no controlables:
  - Ejemplo: Un ingeniero químico está interesado en el efecto de la velocidad de alimentación del catalizador sobre viscosidad de un polímero. Hay varios factores difíciles de controlar: fuente de materia prima, temperatura, operador, pureza de la materia prima
  - Se decide probar en bloques la velocidad de alimentación del catalizador, donde cada bloque consiste en alguna combinación de estos factores no controlables
  - Se utilizan los bloques para probar la robustez de la variable de proceso para las condiciones que no pueden controlarse con facilidad.

Análisis Estadístico para RCBD

- Suponga que se tienen *a* tratamientos a comparar
- Se tienen b bloques
- Hay una observación por tratamiento en cada bloque
- El orden en que se corren los tratamientos dentro de cada bloque se determina al azar

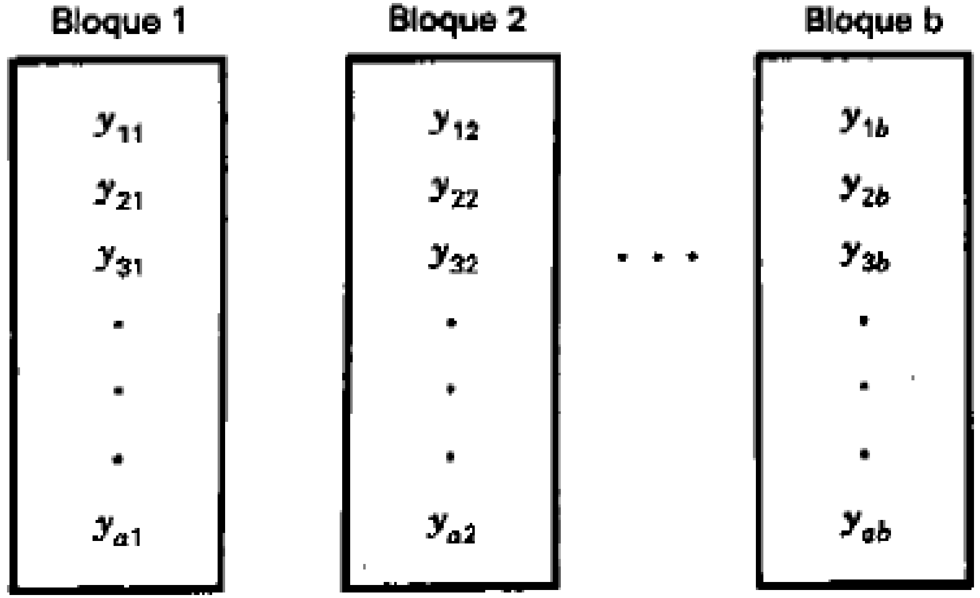

Figura 4-1 El diseño de bloques completos aleatorizados.

Análisis Estadístico para RCBD

- Debido a que la única aleatorización de los tratamientos se hace dentro de los bloques, con frecuencia se dice que los bloques representan una **restricción sobre la aleatorización**
- Modelo de los efectos para RCBD:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \end{cases}$$

- Donde:
  - μ es la media global
  - τ_i es el efecto del tratamiento i-ésimo
  - βj es el efecto del bloque j-ésimo
  - εij es el término del error con distribución NID($0,\sigma^2$) usual

Análisis Estadístico para RCBD

- Se considera que los bloques y los tratamientos son factores fijos
- Los efectos de los tratamientos y los bloques se consideran como desviaciones de la media global, por lo que

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0 \text{ y } \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$$

- El interés se centra en probar la igualdad de las medias de los tratamientos
- Las hipótesis de interés son:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a$$
$$H_1: \text{al menos una } \mu_i \neq \mu_j$$

Análisis Estadístico para RCBD

- Puesto que la media del tratamiento i-ésimo es

$$\mu_i = (1/b)\Sigma_{j=1}^{b}(\mu + \tau_i + \beta_j) = \mu + \tau_i$$

- Una manera equivalente de escribir las hipótesis anteriores es en términos de los efectos de los tratamientos:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$$
$$H_1: \tau_i \neq 0 \text{ para al menos una } i$$

Análisis Estadístico para RCBD

- Sea:
  - $y_{i.}$ El total de observaciones hechas bajo el tratamiento i
  - $y_{.j}$ El total de observaciones del bloque j
  - $y_{..}$ Suma total de todas las observaciones
  - $N = ab$ el número total de observaciones

Table 13-10 A Randomized Complete Block Design with a Treatments and b Blocks

	Blocks					
Treatments	1	2	…	b	Totals	Averages
1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1b}	$y_{1\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot}$
2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2b}	$y_{2\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
a	y_{a1}	y_{a2}	…	y_{ab}	$y_{a.}$	$\bar{y}_{a\cdot}$
Totals	$y_{\cdot 1}$	$y_{\cdot 2}$	…	$y_{\cdot b}$	$y_{\cdot\cdot}$	
Averages	$\bar{y}_{\cdot 1}$	$\bar{y}_{\cdot 2}$	…	$\bar{y}_{\cdot b}$		$\bar{y}_{\cdot\cdot}$

Análisis Estadístico para RCBD

- Matemáticamente expresadas son:

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^{b} y_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, a$$

$$y_{.j} = \sum_{i=1}^{a} y_{ij} \qquad j = 1, 2, \ldots, b$$

$$y_{..} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij} = \sum_{i=1}^{a} y_{i.} = \sum_{j=1}^{b} y_{.j}$$

- Además, los promedios son:

$$\bar{y}_{i.} = y_{i.} / b \qquad \bar{y}_{.j} = y_{.j} / a \qquad \bar{y}_{..} / N$$

Análisis Estadístico para RCBD

- La suma de cuadrados corregida se escribe como:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}[(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})+(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})+(y_{ij}-\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{.j}+\bar{y}_{..})]^2$$

- Y se puede demostrar que se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2=b\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2+a\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..})^2$$
$$+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij}-\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{i.}+\bar{y}_{..})^2$$

Análisis Estadístico para RCBD

- Que se puede resumir como

$$SS_T = SS_{\text{Tratamientos}} + SS_{\text{Bloques}} + SS_E$$

- Donde:
  - Hay *N* observaciones
  - SS_T tiene N-1 grados de libertad
  - Hay a tratamientos y b bloques
  - $SS_{Tratamientos}$ tiene a-1 grados de libertad
  - $SS_{Bloques}$ tiene b-1 grados de libertad
  - SS_E tiene $(a$-$1)(b$-$1)$ grados de libertad

Análisis Estadístico para RCBD

- Puede demostrarse que el valor esperado de los cuadrados medios, si los tratamientos y los bloques son fijos, es

$$E(MS_{\text{Tratamientos}}) = \sigma^2 + \frac{b\sum_{i=1}^{a} \tau_i^2}{a-1}$$

$$E(MS_{\text{Bloques}}) = \sigma^2 + \frac{a\sum_{j=1}^{b} \beta_j^2}{b-1}$$

$$E(MS_E) = \sigma^2$$

- Y si se satisfacen las condiciones de normalidad, los cuadrados serán variables chi-cuadradas

La prueba de hipótesis

- Por tanto, para probar la igualdad de las medias de los tratamientos, se usaría el estadístico de prueba

$$F_0 = \frac{MS_{\text{Tratamientos}}}{MS_E}$$

- Que se distribuye como $F_{a-1,(a-1)(b-1)}$, si la hipótesis nula es verdadera
- La región crítica es la cola superior de la distribución F, y H_0 se rechazaría si $F_0 > F_{\alpha,\ a-1,\ (a-1)(b-1)}$

Resumen de la prueba ANOVA para Bloques completos aleatorizados

Tabla 4-2 Análisis de varianza de un diseño de bloques completos aleatorizados

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F_0
Tratamientos	$SS_{\text{Tratamientos}}$	$a-1$	$\dfrac{SS_{\text{Tratamientos}}}{a-1}$	$\dfrac{MS_{\text{Tratamientos}}}{MS_E}$
Bloques	SS_{Bloques}	$b-1$	$\dfrac{SS_{\text{Bloques}}}{b-1}$	
Error	SS_E	$(a-1)(b-1)$	$\dfrac{SS_E}{(a-1)(b-1)}$	
Total	SS_T	$N-1$		

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SS_{\text{Tratamientos}} = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{a} y_{i.}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SS_E = SS_T - SS_{\text{Tratamientos}} - SS_{\text{Bloques}}$$

$$SS_{\text{Bloques}} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{b} y_{.j}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

Ejemplo

- Considere el experimento de la dureza. Hay 4 puntas y 4 ejemplares de prueba de metal. Cada punta se prueba una vez con cada ejemplar, resultando en un diseño de bloques completos aleatorizados. El orden en que se probaron las puntas en un ejemplar particular se determinó al azar.

Tabla 4-3 Diseño de bloques completos aleatorizados para el experimento de la prueba de la dureza

	Ejemplar de prueba (bloque)			
Tipo de punta	1	2	3	4
1	9.3	9.4	9.6	10.0
2	9.4	9.3	9.8	9.9
3	9.2	9.4	9.5	9.7
4	9.7	9.6	10.0	10.2

Ejemplo

- Para simplificar los cálculos, los datos originales se codifican restándole 9.5 y multiplicando el resultado por 10

Tabla 4-4 Datos codificados del experimento de la prueba de la dureza

	Ejemplar de prueba (bloque)				
Tipo de punta	1	2	3	4	$y_{i.}$
1	–2	–1	1	5	3
2	–1	–2	3	4	4
3	–3	–1	0	2	–2
4	2	1	5	7	15
$y_{.j}$	–4	–3	9	18	$20 = y_{..}$

Ejemplo

- Cálculo de los cuadrados medios:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$= 154.00 - \frac{(20)^2}{16} = 129.00$$

$$SS_{\text{Tratamientos}} = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{4} y_{i.}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$= \frac{1}{4}[(3)^2 + (4)^2 + (-2)^2 + (15)^2] - \frac{(20)^2}{16} = 38.50$$

$$SS_{\text{Bloques}} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{4} y_{.j}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$= \frac{1}{4}[(-4)^2 + (-3)^2 + (9)^2 + (18)^2] - \frac{(20)^2}{16} = 82.50$$

$$SS_E = SS_T - SS_{\text{Tratamientos}} - SS_{\text{Bloques}}$$

$$= 129.00 - 38.50 - 82.50 = 8.00$$

Ejemplo

- Análisis de varianza utilizando un α=0.05.
- El valor crítico de F es $F_{0.05,3,9}$=3,86
- Puesto que 14.44>3.86, se concluye que el tipo de punta afecta la lectura de la dureza media.

Tabla 4-5 Análisis de varianza del experimento de la prueba de la dureza

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F_0	Valor *P*
Tratamientos (tipo de punta)	38.50	3	12.83	14.44	0.0009
Bloques (ejemplares)	82.50	3	27.50		
Error	8.00	9	0.89		
Total	129.00	15			

Conclusiones

- Es interesante observar los resultados que se habrían obtenido si no se hubiese tenido conocimiento de los diseños de bloques aleatorizados.
- Suponga que se usaran 4 ejemplares, asignando al azar puntas a cada uno de ellos, y que resultara casualmente el mismo diseño que el de la tabla 4-3.

Tabla 4-3 Diseño de bloques completos aleatorizados para el experimento de la prueba de la dureza

	Ejemplar de prueba (bloque)			
Tipo de punta	1	2	3	4
1	9.3	9.4	9.6	10.0
2	9.4	9.3	9.8	9.9
3	9.2	9.4	9.5	9.7
4	9.7	9.6	10.0	10.2

Conclusiones

- Si se hiciese un análisis de estos datos como un diseño completamente aleatorizado de un solo factor se presenta en la tabla 4-6

Tabla 4-6 Análisis incorrecto del experimento de la prueba de la dureza como un diseño completamente aleatorizado

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F_0
Tipo de punta	38.50	3	12.83	1.70
Error	90.50	12	7.54	
Total	129.00	15		

Conclusiones

- Puesto que $F_{0.05,3,12}=3.49$, no puede rechazarse la hipótesis de la igualdad de las mediciones de la dureza de las 4 puntas.
- Quiere decir, que **el diseño de bloques aleatorizados reduce los suficiente la cantidad de ruido en los datos para que las diferencias entre las 4 puntas sean detectadas**.
- Lo anterior implica que si un experimentador no recurre a la formación de bloques cuando debería haberlo hecho, el efecto puede ser inflar el error experimental a tal grado que las diferencias importantes entre las medias de los tratamientos sean indetectables.

Análisis adicionales

- Al igual que para el diseño experimental completamente aletorizado con un solo factor, con RCBD también se pueden hacer los mismos análisis:
  - Comparaciones entre medias
  - Verificación de la adecuación del modelo
  - Elección del tamaño de la muestra
  - Estimación de los parámetros del modelo

Comparaciones entre medias para RCBD

- Se puede utilizar cualquiera de los procedimientos de comparaciones múltiples del diseño aleatorizado con un solo factor
- Se hacen las siguientes sustituciones:
  - En las expresiones el número de réplicas (n) en el diseño completamente aleatorizado se reemplaza por el número de bloques (b)
  - El número de grados de libertad del diseño aleatorizado de un factor [a(n-1)], se reemplaza por [(a-1)(b-1)]

Verificación de la adecuación del modelo

- Deberá estarse alerta a los problemas potenciales con:
    - El supuesto de normalidad
    - La desigualdad de la varianza por tratamiento o bloque
    - La interacción bloque-tratamiento
- Se utiliza el análisis residual para él diagnóstico de adecuación del modelo

Elección del tamaño de la muestra

- En RCBD es importante determinar el tamaño de la muestra o el número de bloques que deben usarse.
- Al incrementar el número de bloques, se incrementa el número de réplicas y el número de grados de libertad del error.
- Lo anterior hace que aumente la sensibilidad del diseño
- Se puede aplicar al RCBD cualquiera de las técnicas descritas para el diseño aleatorizado con un factor.
- Las curvas de operación característica pueden usarse con:

$$\Phi^2 = \frac{b\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a\sigma^2}$$

- Donde hay *a-1* grados de libertad en el numerador y *(a-1)(b-1)* grados de libertad en el denominador.

Ejemplo

- Considere el problema de la prueba de la dureza del ejemplo 4-1.
- Suponga que quiere determinarse el número apropiado de bloques que deben correrse si el interés se encuentra en detectar una diferencia máxima real en las lecturas de la dureza media de 0.4 con una alta probabilidad, y una estimación razonable de la desviación estándar de los errores es σ=0.1
- El valor mínimo de Φ^2 es (escribiendo b, el número de bloques, en lugar de n):

$$\Phi^2 = \frac{bD^2}{2a\sigma^2}$$

- Donde D es la diferencia máxima que quiere detectarse.
- Por tanto,

$$\Phi^2 = \frac{b(0.4)^2}{2(4)(0.1)^2} = 2.0b$$

Ejemplo

- Si se usan b=3 bloques, entonces $\Phi = \sqrt{2.0b} = \sqrt{2.0(3)} = 2.45$, y hay *(a-1)(b-1)=3(2)=6* grados de libertad del error.
- En la figura OC, con $v_1=a-1=3$ y $\alpha=0.05$, indica que el riesgo β de este diseño es aproximadamente 0.10 (potencia=1-β=0.9)
- Si se usan b=4 bloques, $\Phi = \sqrt{2.0b} = \sqrt{2.0(4)} = 2.83$, con 9 grados de libertad del error y un riesgo β de 0.03 (potencia=1-β=0.97).
- Tres o cuatro bloques darán como resultado un diseño con una alta probabilidad de detectar la diferencia entre las lecturas consideradas importantes.
- Si los ejemplares son baratos, el experimentador podría usar 4 bloques.