

# Conceptos de Probabilidad (II)

Jhon Jairo Padilla A., PhD.

# Necesidad

- Es común escuchar frases como:
  - “Juan Probablemente ganará el torneo de tenis”
  - “Tengo posibilidad de ganarme la lotería esta noche”
  - “La mayoría de nuestros graduados probablemente tendrán trabajo dentro de 1 año”
- En estas frases, se puede decir que hay cierta incertidumbre de que sucederá algo

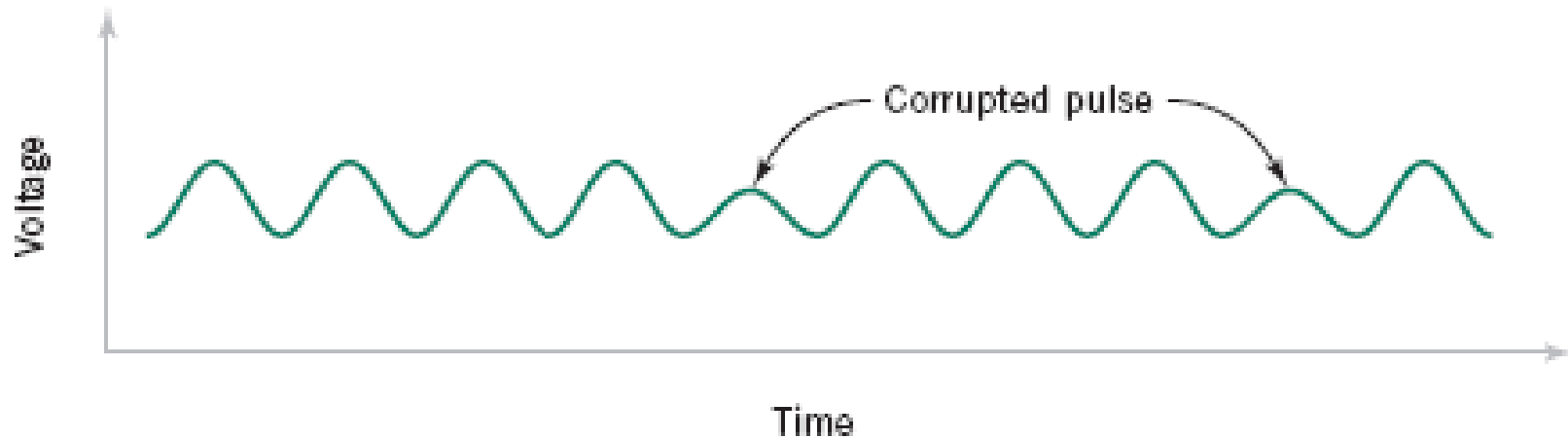
# Medición de la incertidumbre

- La incertidumbre puede medirse mediante la probabilidad de ocurrencia de un suceso
- La probabilidad de que ocurra algo puede expresarse como un número entre 0 y 1.

# Probabilidad

- Se utiliza para expresar:
  - La posibilidad u oportunidad de que ocurra algo
  - El riesgo o incertidumbre en aplicaciones de ingeniería
- Puede interpretarse como:
  - El grado de certeza
  - Una frecuencia relativa

# Probabilidad como frecuencia relativa



$$\text{Relative frequency of corrupted pulse} = \frac{2}{10}$$

**Ejemplo:** Frecuencia relativa de ocurrencia de pulsos dañados al ser transmitidos sobre un canal de comunicaciones.

# Resultados igualmente probables

- Si un espacio muestral está compuesto por resultados igualmente posibles, la probabilidad de ocurrencia de cada resultado es  $1/N$ .

# Ejemplo

- Asuma que el 30% de los diodos láser en un lote de 100, alcanza el límite mínimo de potencia requerida por un cliente específico. Si se selecciona un diodo láser aleatoriamente, de forma que cada diodo láser tiene la misma probabilidad de ser seleccionado:
  - Cuál es la probabilidad de tomar un diodo cualquiera?
  - Cuál es la probabilidad de tomar un diodo que tenga las características solicitadas por el cliente?
- Rta/
  - Si cada diodo tiene las mismas posibilidades, la probabilidad de seleccionar un diodo cualquiera es de  $P = \frac{1}{100} = 0.01$
  - Si hay 30 diodos que cumplen de 100 posibles, la posibilidad de tomar uno de estos será de  $P=0.01 \times 30 = 0.3$

# Probabilidad de un Evento

- Del ejemplo anterior vemos que, la probabilidad de un evento puede obtenerse a partir de las probabilidades de los resultados de este evento.

- **Definición:**

- La probabilidad de un Evento  $A$ , denotada por  $P(A)$ , es igual a la suma de las probabilidades de todos los resultados posibles en  $A$ .



# Probabilidad de un evento

- Adicionalmente se cumple que:
  - Si  $A$  es un evento del espacio muestral  $S$ :
$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad P(\emptyset) = 0 \quad P(S) = 1$$
  - Si  $E_1$  es un subconjunto de  $E_2$ :
$$P(E_1) \leq P(E_2)$$
  - Además, si  $A_1, A_2, A_3 \dots$  son eventos mutuamente excluyentes, entonces:
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

# Ejemplo

- Se lanza dos veces una moneda balanceada. Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos una cara?
- Rta/
  - Espacio muestral:  $S=\{CC, CS, SC, SS\}$
  - Probabilidad de ocurrencia de uno de los resultados:  $w$
  - Luego  $4w=1$  (son equiprobables); entonces  $w=1/4$
  - Evento:  $A=\{CC, CS, SC\}$ ; entonces  $P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

# Ejemplo

- Se carga un dado de forma que sea dos veces más probable que salga un número par que uno impar. Si E es el evento de que ocurra un número menor que 4 en un solo lanzamiento del dado, encuentre  $P(E)$ .
- Rta/
  - Espacio muestral:  $S=\{1,2,3,4,5,6\}$
  - Supongamos que la probabilidad de un número impar es  $w$ ; entonces la probabilidad de uno par es  $2w$
  - Luego  $P(S) = 1 = w + 2w + w + 2w + w + 2w = 9w$
  - Entonces  $w=1/9$
  - $E=\{1,2,3\}$  entonces  $P(E) = w + 2w + w = 4w = \frac{4}{9}$

# Ejemplo

- Un experimento aleatorio puede producir uno de los resultados  $\{a,b,c,d\}$  con probabilidades 0.1, 0.3, 0.5 y 0.1 respectivamente. Sea que A denote el evento  $\{a,b\}$ , B el evento  $\{b,c,d\}$  y C el evento  $\{d\}$ . Calcule  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(C)$ ,  $P(A')$ , Probabilidad de la intersección de A y B, de A y C y de A unión B.

- $P(A)=0.1+0.3=0.4$

$$A \cap B = \{b\} \quad A \cap C = \{\emptyset\}$$

- $P(B)=0.3+0.5+0.1=0.9$

$$P(A \cap B) = 0.3 \quad P(A \cap C) = 0$$

- $P(C)=0.1$

$$A \cup B = \{a,b,c,d\}$$

- $P(A')=1-P(A)=1-0.4=0.6$

$$P(A \cup B) = 0.1+0.3+0.5+0.1=1$$

# Reglas Aditivas

- A menudo suele ser más sencillo calcular la probabilidad de un evento a partir del conocimiento de las probabilidades de otros eventos.
- Esto puede hacerse si el evento en cuestión puede representarse como:
  - La unión de dos eventos
  - La intersección de dos eventos
  - El complemento de otro evento
- Las reglas aditivas se aplican a uniones de eventos

# Reglas Aditivas

- Teorema:

Si A y B son dos eventos de un espacio muestral S, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Corolario 1:

Si A y B son mutuamente excluyentes,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

# Reglas Aditivas

- Corolario 2

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son mutuamente excluyentes,  
entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

- Corolario 3:

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  es una partición de un espacio  
muestral  $S$ , entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(S) = 1$$

# Reglas Aditivas

- Teorema:

Para tres eventos A, B y C,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- Teorema:

Si A y A' son eventos complementarios, entonces

$$P(A) + P(A') = 1$$



# Ejemplo

- Al final del semestre, Juan se va a graduar de ingeniería industrial en una universidad. Después de tener entrevistas en dos compañías donde quiere trabajar, él evalúa la posibilidad que tiene de lograr una oferta de empleo en la compañía A como 0.8, y la probabilidad de obtenerla de la compañía B como 0.6.
- Si por otro lado, considera que la probabilidad de que reciba ofertas de ambas compañías es 0.5 ¿cuál es la probabilidad de que reciba al menos una oferta de esas dos compañías?
- Rta/  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.6 - 0.5 = 0.9$

# Ejemplo

- Si las probabilidades de que un individuo que compra un automóvil nuevo elija color verde (V), blanco (B), rojo (R) ó azul (A) son respectivamente, 0.09, 0.15, 0.21 y 0.23, ¿cuál es la probabilidad de que un comprador dado adquiera un automóvil nuevo que tenga uno cualquiera de esos colores?
- Rta/ V, B, R, A son eventos mutuamente excluyentes, por tanto,

$$P(V \cup B \cup R \cup A) = P(V) + P(B) + P(R) + P(A) = 0.09 + 0.15 + 0.21 + 0.23 = 0.68$$

# Ejemplo

- Suponga que las especificaciones del fabricante para la longitud de un cable de cierto tipo de computador son  $2000 \pm 10$  mm. En esta industria se sabe que el cable pequeño (long.  $< 1990$  mm) tiene la misma probabilidad de salir defectuoso (no cumplir con las especificaciones) que el cable grande (long.  $> 2010$  mm). Se sabe además, que la probabilidad de que el procedimiento de producción cumpla con las especificaciones es de 0.99.
- Cuál es la probabilidad de que un cable elegido aleatoriamente sea muy largo?
- Cuál es la probabilidad de que un cable elegido aleatoriamente tenga una longitud mayor o igual a 1990 mm?

# Ejemplo

- Solución:
  - Sea M el evento de que el cable cumple con las especificaciones. Entonces  $P(M)=0.99$
  - Por tanto, la probabilidad de que el cable no cumpla con las especificaciones será
$$P(M')=1-P(M)=0.01$$
  - La probabilidad de que el cable sea muy corto (C) o muy largo (L) será entonces  $P(C)=P(L)=0.01/2=0.005$
  - La probabilidad de que el cable tenga una longitud mayor o igual a 1990 mm será
$$P(X \geq 1990)=P(M)+P(L)=0.99+0.005=0.995$$

# Probabilidad condicional

- Ejemplo:
  - Un canal de comunicación digital tiene un índice de error de un bit por cada mil bits transmitidos. Los errores son raros pero cuando ocurren tienden a hacerlo en rachas que afectan varios bits consecutivos. Si se transmite un solo bit un modelo de probabilidad de error sería  $1/1000$ . Sin embargo, si el bit previo tuvo un error, debido a una racha, podría conjeturarse que la probabilidad de que el siguiente bit tenga un error es mayor que  $1/1000$ .

# Probabilidad condicional

- La probabilidad de que un evento B ocurra cuando se sabe que ya ocurrió algún evento A se llama **probabilidad condicional** y se denota con  $P(B|A)$ .
- $P(B|A)$  se lee: “La probabilidad de que ocurra B dado que ocurrió A” ó “La probabilidad de B dado A”.
- **La probabilidad condicional supone que los dos eventos tienen cierto grado de dependencia en la ocurrencia de uno con respecto a otro.**

# Probabilidad condicional

- Definición:

La probabilidad condicional de B, dado A, que se denota con  $P(B|A)$ , se define como

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Si  $P(A) > 0$ .

# Ejemplo

- La probabilidad de que un vuelo programado normalmente salga a tiempo es  $P(D)=0.83$ ; la probabilidad de que llegue a tiempo es  $P(A)=0.82$ ; y la probabilidad de que salga y llegue a tiempo es 0.78. Encuentre la probabilidad de que un avión:
  - a. Llegue a tiempo, dado que salió a tiempo
  - b. Haya salido a tiempo dado que llegó a tiempo



# Ejemplo

- Solución:
  - Probabilidad de llegar a tiempo dado que salió a tiempo:

$$P(A | D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.94$$

- Probabilidad de haber salido a tiempo dado que llegó a tiempo:

$$P(D | A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$$

# Ejemplo

- Suponga la población de adultos en una pequeña ciudad que cumplen con los requisitos para obtener un título universitario. Al clasificarlos de acuerdo a su sexo y situación laboral obtenemos la tabla de la derecha. Si se elige aleatoriamente un individuo, calcule la probabilidad de que sea hombre dado que tiene empleo.

Individuo	Empleado	Desempleado	Total
Hombre	460	40	500
Mujer	140	260	400
Total	600	300	900

De los datos de la tabla se puede calcular

Directamente :

$$P(H | E) = \frac{460}{600} = \frac{23}{30}$$

Usando la expresión de probabilidad

Condicional:

$$P(E) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3} \quad P(E \cap H) = \frac{460}{900} = \frac{23}{45}$$

$$P(H | E) = \frac{\frac{23}{45}}{\frac{2}{3}} = \frac{23}{30}$$

# Eventos independientes

- En los ejemplos vistos un evento influye sobre otro.
- El caso opuesto es el de eventos que no influyen entre sí. A estos eventos se les llama **eventos independientes**.
- *Muchas de las situaciones estudiadas en la estadística aplicada suponen la independencia de los eventos.*

# Eventos independientes

- Definición:
  - Dos eventos A y B son independientes si y sólo si
$$P(B|A)=P(B) \quad \text{ó} \quad P(A|B)=P(A)$$
La condición  $P(B|A)=P(B)$  implica que  $P(B|A)=P(B)$ , y viceversa.

# Reglas Multiplicativas

- Las reglas aditivas se utilizan para obtener la probabilidad de la unión de varios eventos.
- Las reglas multiplicativas se utilizan para obtener la probabilidad de la intersección de varios eventos.

- Teorema:

Si en un experimento pueden ocurrir los eventos A y B,  
entonces

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A)$$

Dado que  $P(A) > 0$ .

# Reglas Multiplicativas

- Es importante aclarar que, ya que

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

- También se puede escribir:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)P(A | B)$$

# Ejemplo

- Suponga que tenemos una caja de fusibles que contiene 20 unidades, de las cuales 5 están defectuosas. Si se seleccionan dos fusibles al azar y se retiran de la caja, uno después del otro y sin reemplazar el primero. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos estén defectuosos?

- Rta/

- Sea A, el evento de sacar el primer fusible y que esté defectuoso:  $P(A)=5/20=1/4$
- Sea B, el evento de sacar el segundo fusible defectuoso, dado que el primero está defectuoso:  $P(B|A)=4/19$
- Por tanto , la probabilidad de que A y B sean defectuosos será:

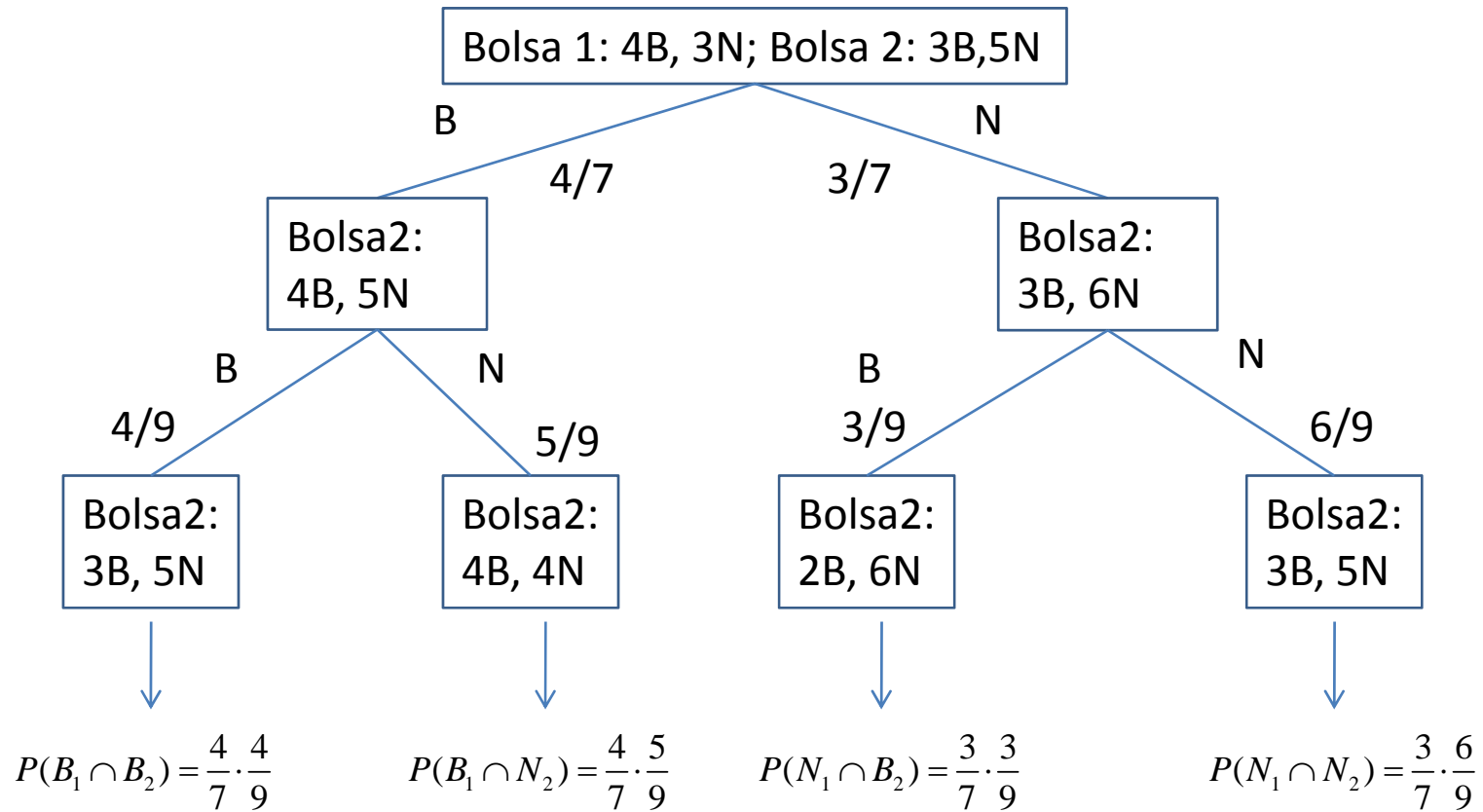
$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

# Ejemplo

- Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 3 negras, y una segunda bolsa contiene 3 bolas blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera bolsa y se coloca sin verla en la segunda bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que ahora se saque una bola negra de la segunda bolsa?



# Ejemplo



$$P([N_1 \cap N_2] \cup [B_1 \cap N_2]) = P(N_1 \cap N_2) + P(B_1 \cap N_2)$$

$$P([N_1 \cap N_2] \cup [B_1 \cap N_2]) = P(N_1)P(N_2 | N_1) + P(B_1)P(N_2 | B_1)$$

$$P([N_1 \cap N_2] \cup [B_1 \cap N_2]) = \frac{3}{7} \cdot \frac{6}{9} + \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{38}{63}$$

# Probabilidad de Eventos independientes

- Teorema:

Dos eventos A y B son independientes si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Por tanto, la probabilidad de dos eventos independientes es la multiplicación de sus probabilidades

# Ejemplo

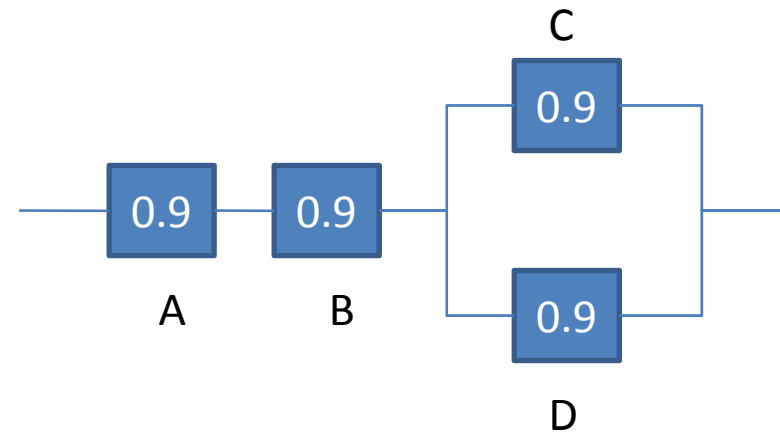
- Una pequeña ciudad tiene un carro de bomberos y una ambulancia disponibles para emergencias. La probabilidad de que el carro de bomberos esté disponible cuando se necesite es 0.98 y la probabilidad de que la ambulancia esté disponible cuando se le requiera es 0.92. En el caso de que resulte un herido de un edificio en llamas, encuentre la probabilidad de que tanto la ambulancia como el carro de bomberos estén disponibles.
- Rta/
  - Sea A el evento de estar disponible el carro de bomberos
  - Sea B el evento de estar disponible la ambulancia

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.98)(0.92) = 0.9016$$

# Ejemplo

- Un sistema eléctrico consiste de cuatro componentes como en la figura. El sistema funciona si existe un camino con todos los componentes funcionando. En la figura se tienen las probabilidades de que funcione cada uno de los dispositivos. Encuentre:

- La probabilidad de que el sistema funcione
- La probabilidad de que el componente C no funcione dado que el sistema completo funciona
- Suponga que los cuatro componentes funcionan de manera independiente



# Ejemplo

- El sistema completo funcionará si:
  - A y B funcionan y (C o D funcionan):

$$P(A \cap B \cap (C \cup D)) = P(A)P(B)P(C \cup D)$$

$$P(A \cap B \cap (C \cup D)) = P(A)P(B)[P(C) + P(D) - P(C \cap D)]$$

$$P(A \cap B \cap (C \cup D)) = P(A)P(B)[P(C) + P(D) - (P(C)P(D))]$$

$$P(A \cap B \cap (C \cup D)) = (0.9)(0.9)[0.9 + 0.9 - (0.9 \cdot 0.9)]$$

$$P(A \cap B \cap (C \cup D)) = (0.81)(1.8 - 0.81) = 0.8019$$

# Probabilidad de la intersección de k eventos

- Teorema:

Si en un experimento pueden ocurrir los eventos  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_k | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

Si los eventos son independientes entonces

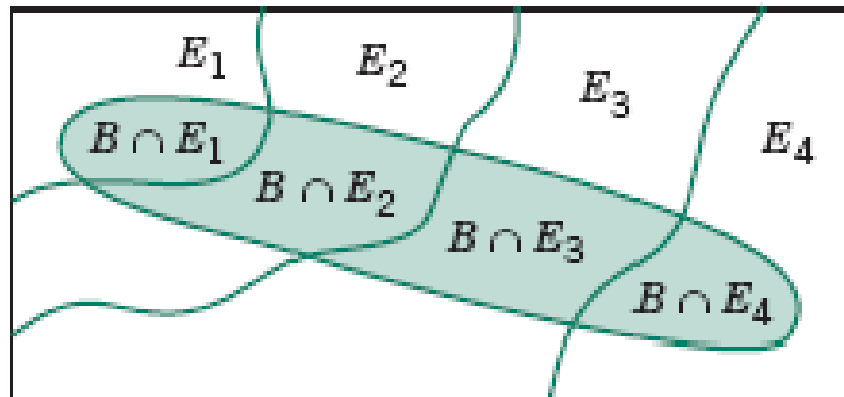
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_k)$$

# Probabilidad Total

- Teorema:

- Si los eventos  $E_1, E_2, \dots, E_k$  constituyen una partición del espacio muestral  $S$ , tal que  $P(E_i) \neq 0$  para  $i=1, 2, \dots, k$ , entonces, para cualquier evento  $B$  de  $S$ ,

$$P(B) = \sum_{i=1}^k P(E_i \cap B) = \sum_{i=1}^k P(E_i)P(B|E_i)$$



$$B = (B \cap E_1) \cup (B \cap E_2) \cup (B \cap E_3) \cup (B \cap E_4)$$

# Ejemplo

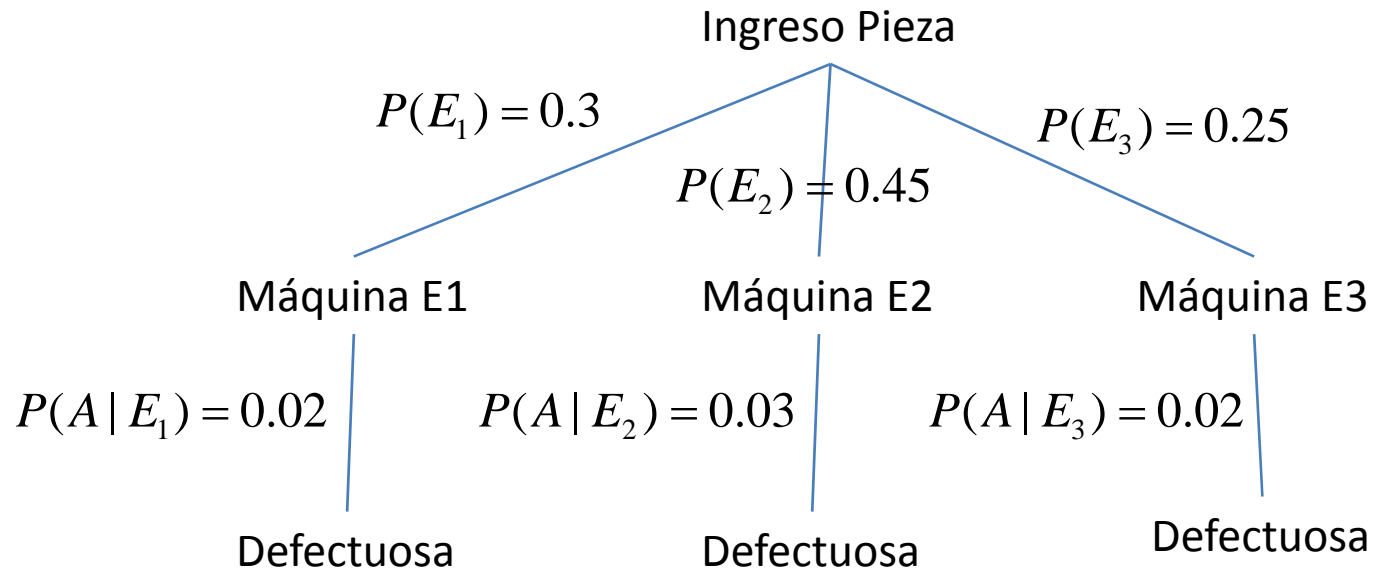
- En cierta planta de ensamble, tres máquinas,  $E_1, E_2, \dots, E_k$ , montan 30, 45 y 25% de los productos respectivamente. Por la experiencia pasada se sabe que 2, 3 y 2% de los productos ensamblados por cada máquina, respectivamente, tienen defectos. Ahora, suponga que se selecciona de forma aleatoria un producto terminado. ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?



# Respuesta

- Considere los siguientes Eventos:
  - A: el producto está defectuoso
  - $E_1$ : El producto está ensamblado con la máquina  $E_1$
  - $E_2$ : El producto está ensamblado con la máquina  $E_2$
  - $E_3$ : El producto está ensamblado con la máquina  $E_3$
  - Según la regla de la probabilidad total tenemos que:
$$P(A) = P(E_1)P(A | E_1) + P(E_2)P(A | E_2) + P(E_3)P(A | E_3)$$
  - Estas probabilidades se pueden extraer del diagrama en árbol

# Ejemplo



$$P(A) = P(E_1)P(A | E_1) + P(E_2)P(A | E_2) + P(E_3)P(A | E_3)$$

$$P(A) = (0.3)(0.02) + (0.45)(0.03) + (0.25)(0.02) = 0.0245$$

# Regla de Bayes

- Teorema:

Si los eventos  $E_1, E_2, \dots, E_k$ , constituyen una partición del espacio muestral  $S$ , donde  $P(E_i) \neq 0$  para  $i=1, 2, \dots, k$ , entonces para cualquier evento  $A$  en  $S$  tal que  $P(A) \neq 0$ ,

$$P(E_r | A) = \frac{P(E_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(E_i \cap A)} = \frac{P(E_r)P(A | E_r)}{\sum_{i=1}^k P(E_i)P(A | E_i)}$$

# Ejemplo

- Se tiene el mismo problema anterior. Si se elige al azar un producto y se encuentra defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que esté ensamblado con la máquina  $E_3$ ?

$$P(E_3 | A) = \frac{P(E_3 \cap A)}{\sum_{i=1}^3 P(E_i \cap A)} = \frac{P(E_3)P(A | E_3)}{\sum_{i=1}^3 P(E_i)P(A | E_i)} =$$

$$P(E_3 | A) = \frac{P(E_3)P(A | E_3)}{P(E_1)P(A | E_1) + P(E_2)P(A | E_2) + P(E_3)P(A | E_3)}$$

$$P(E_3 | A) = \frac{(0.25)(0.02)}{(0.3)(0.02) + (0.45)(0.03) + (0.25)(0.02)} = \frac{0.05}{0.0245} = \frac{10}{49}$$