

Distribuciones de Probabilidad Contínuas

Jhon Jairo Padilla Aguilar, PhD.

Introducción

- En esta sección se estudiarán algunas distribuciones de probabilidad continuas que son bastante utilizadas en ingeniería para modelar diferentes procesos.

DISTRIBUCION CONTINUA UNIFORME

Distribución Continua Uniforme

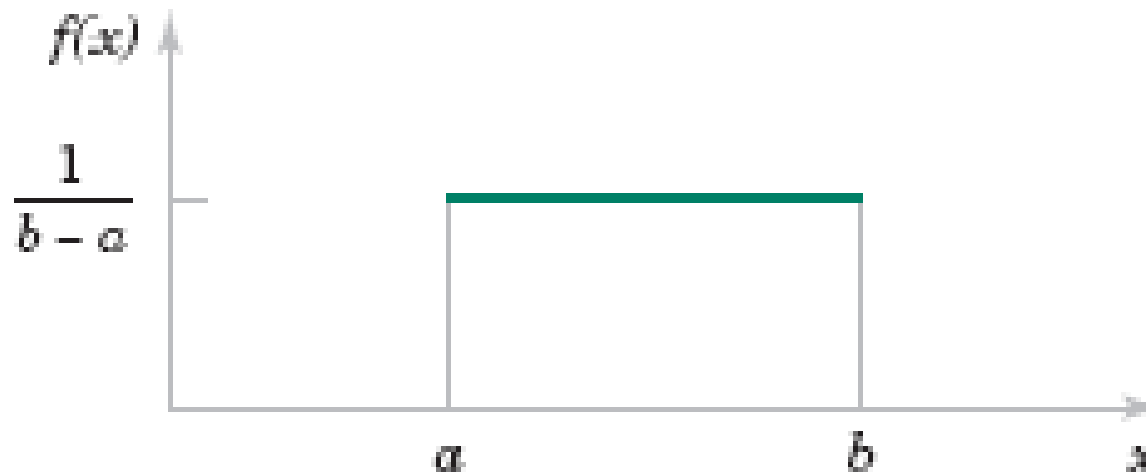
- Es la distribución más sencilla de todas
- De forma análoga a la distribución discreta uniforme, en la distribución continua uniforme el valor de la probabilidad es constante en un rango de la v.a. X .

Definición

- Una v.a. continua X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

Tiene una **distribución continua uniforme**.



Media y Varianza

- La media y la varianza de una v.a. aleatoria continua uniforme X en $a \leq x \leq b$ son

$$\mu = E(X) = \frac{(a+b)}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ejemplo

- Sea que la v.a. continua X denote la corriente medida en un alambre delgado de cobre en mA. Suponga que el rango de X es $[0, 20\text{mA}]$, y suponga que la función de densidad de probabilidad de X es $f(x)=0,05$ para $0 \leq x \leq 20$.

Cuál es la probabilidad de que una medición de la corriente esté entre 5 y 10 mA?

- **Solución:**
- La probabilidad se calcula como:

$$P(5 < X < 10) = \int_5^{10} 0.05 dx = 0.05x \Big|_5^{10} = (0.05)(5) = 0,25$$

- Además, la media y la varianza serán:

$$\mu = E(X) = \frac{(0+20)}{2} = 10\text{mA}$$

$$\sigma^2 = \frac{(20-0)^2}{12} = 33.33$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Distribución Normal

- Es la distribución más utilizada
- **Teorema del límite central:** Los histogramas resultado de la toma de muestras suelen tener la forma aproximada de una distribución normal cuando el número de muestras es grande.
- Desarrollada inicialmente por DeMoivre en 1733, pero su trabajo estuvo perdido.
- Gauss hizo el mismo desarrollo 100 años después y se le dio el crédito inicialmente.
- La distribución normal también se conoce como **Distribución Gaussiana**.

Definición

- Una v.a. X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Tiene una distribución normal con parámetros

$$\mu: -\infty < \mu < \infty$$

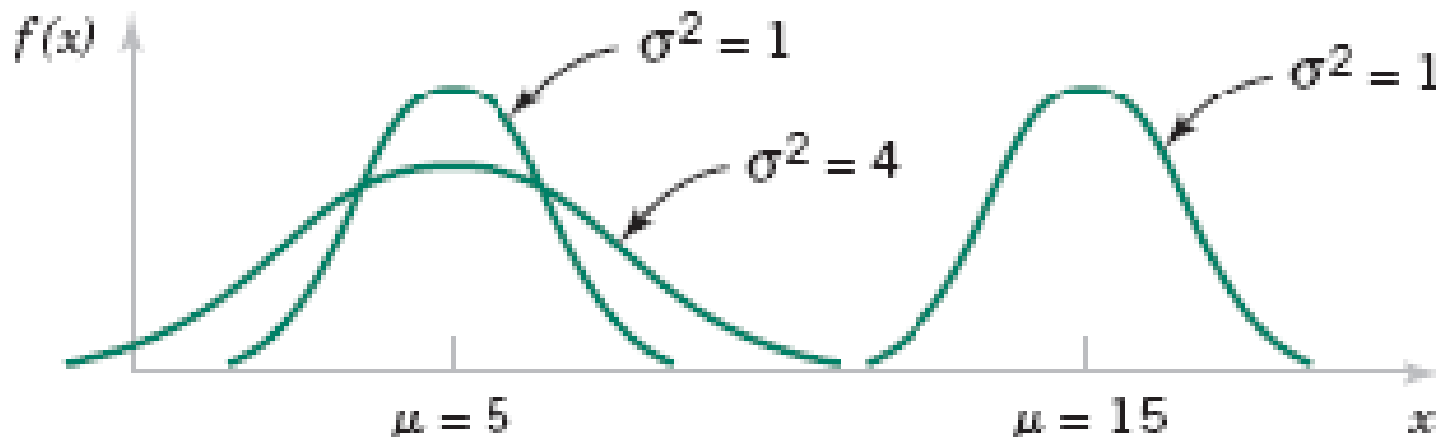
$$\sigma > 0$$

- Además, la media y la varianza son:

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

Forma de la Distribución Normal



Forma de la distribución normal para diferentes valores de μ y σ^2

Ejemplo

- Suponga que las mediciones de la corriente en una tira de alambre siguen una distribución normal con una media de 10mA y una varianza de 4mA².Cuál es la probabilidad de que una medición exceda 13 mA?
- Solución:

$$P(X > 13) = \int_{13}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} e^{-\frac{(x-10)^2}{(2)(4)}} dx$$

La solución se halla por métodos de cálculo numérico o por tablas

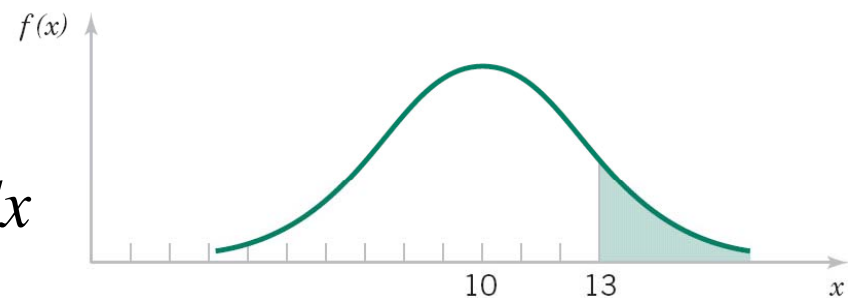
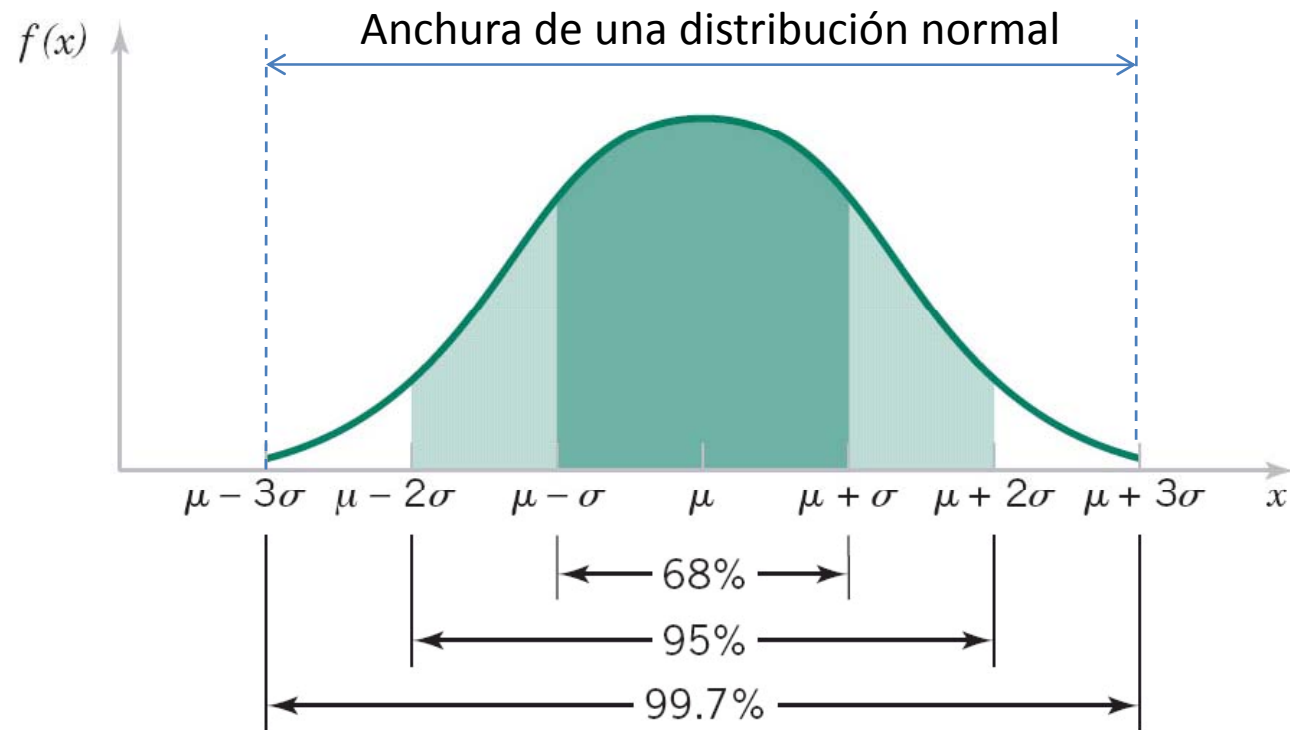


Figure 4-11 Probability that $X > 13$ for a normal random variable with $\mu = 10$ and $\sigma^2 = 4$.

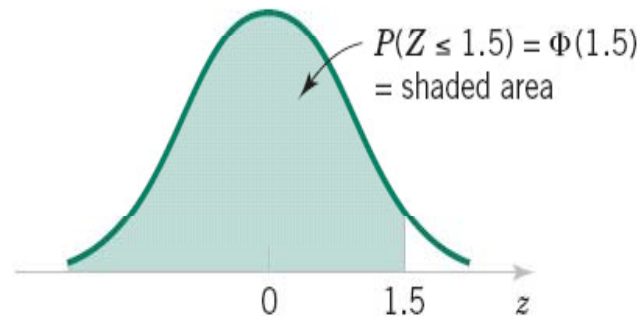
Resultados típicos de cualquier v.a. normal



Variable Aleatoria Normal estándar

- A una v.a. normal con $\mu=0$ y $\sigma^2=1$ se le llama **variable aleatoria normal estándar**. Una v.a. normal estándar se denota como **Z**.
- La **función de distribución de probabilidad acumulada**, $\Phi(z)=P(Z\leq z)$, de una v.a normal estándar suele encontrarse en tablas y suele ser muy útil para hacer cálculos de otras distribuciones normales no estandarizadas.

Figure 4-13 Standard normal probability density function.



| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 |
|----------|---------|----------|---------|---------|
| 0 | 0.50000 | 0.50399 | 0.50398 | 0.51197 |
| \vdots | | \vdots | | |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 |

Propiedades útiles de la distribución normal estándar

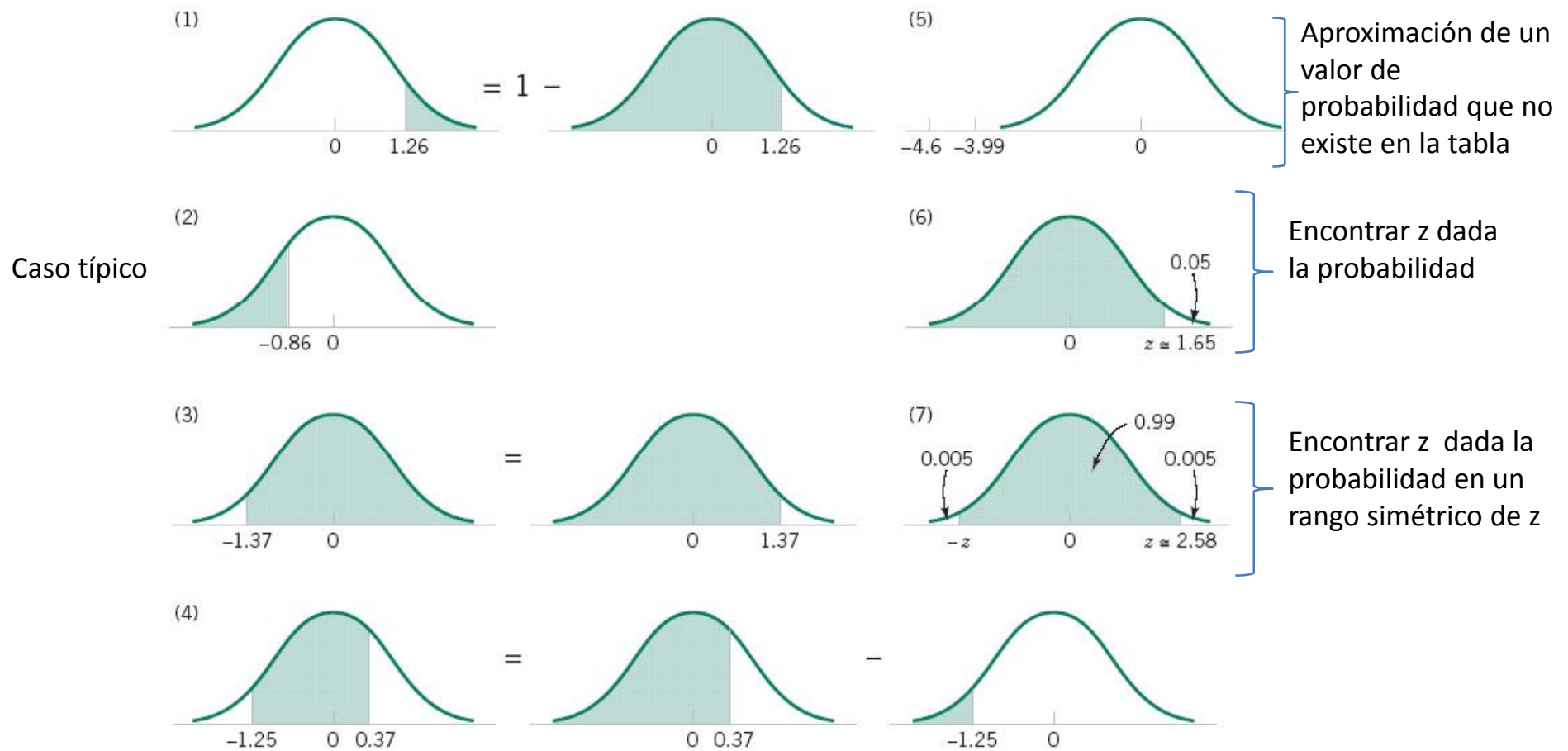


Figure 4-14 Graphical displays for standard normal distributions.

Estandarización de una v.a. normal

- Para calcular las probabilidades de cada v.a. normal diferente se requiere una tabla diferente.
- Por fortuna, todas las distribuciones normales se relacionan algebraicamente.
- Se puede usar la tabla de probabilidades de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad de cualquier otra distribución normal
- Se requiere entonces hacer una transformación simple de la v.a. normal original a la v.a. normal estándar. A este proceso se le llama **estandarización**.

Estandarización de una v.a. normal

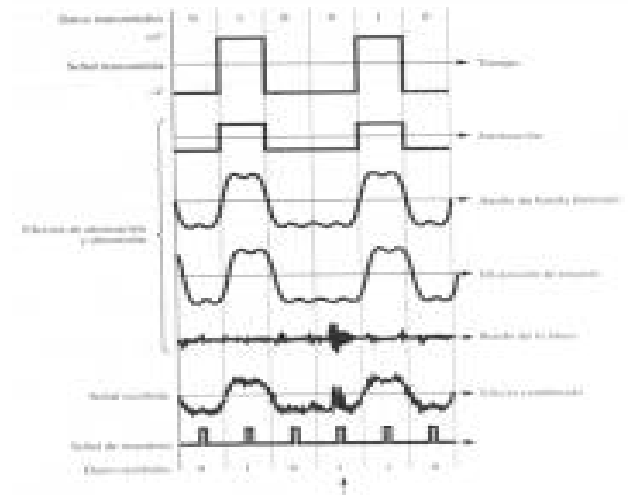
- Si X es una v.a. normal con $E(X)=\mu$ y $V(X)=\sigma^2$, entonces la v.a. $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
- Es una v.a. normal con $E(Z)=0$ y $V(Z)=1$. Es decir, Z es una v.a. normal estándar.
- Por tanto, $P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z)$
- Es decir, la probabilidad se obtiene introduciendo el valor $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ en la tabla de la función de distribución acumulada normal estándar

Ejemplo

- Suponga que en la detección de una señal digital el ruido de fondo sigue una distribución Gaussiana (ruido Gaussiano ó ruido blanco) con una media de 0 voltios y una desviación estándar de 0.45 voltios. Si el sistema asume que se ha transmitido un uno digital cuando el voltaje excede 0.9 voltios. ¿Cuál es la probabilidad de detectar un uno digital cuando se envió un cero digital?
- Solución:
 - Sea que la v.a. N denote el voltaje de ruido. El voltaje de la señal en el canal sería $N+S$, donde S es el voltaje de la señal.
 - En este caso $S=0$, luego el voltaje recibido será el valor de N .
 - Entonces la probabilidad solicitada es $P(N>0.9)$
 - Hacemos $Z=(N-0)/0.45$ y $z=(0.9-0)/0.45$
 - Luego

$$P(N > 0.9) = P\left(\frac{N - 0}{0.45} > \frac{0.9 - 0}{0.45}\right) = P(Z > 2)$$

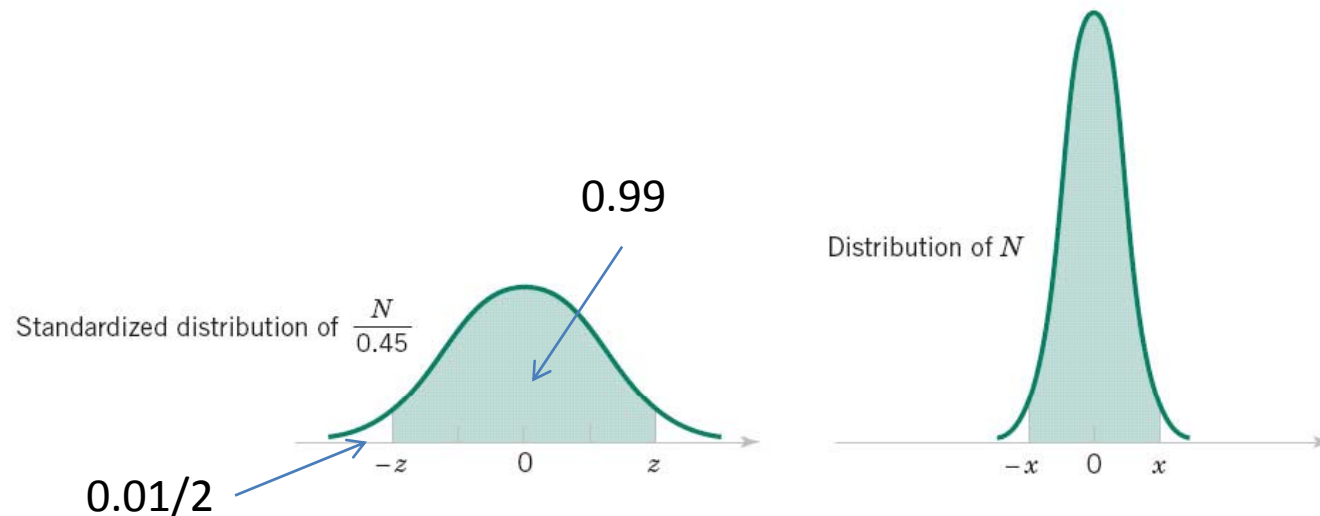
$$P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.97725 = 0.22275$$



Ejemplo

- En el ejemplo anterior determine los límites simétricos alrededor de 0 que incluyan el 99% de todas las lecturas de ruido.
- Solución:
 - El problema requiere encontrar x tal que:
 $P(-x < N < x) = 0.99$
 - Hallamos primero $P(-z < N < z) = 0.99$ con la tabla de probabilidades de la distribución normal estándar: $P(N < z) = 0.99 + 0.005$
 - Se obtiene $P(-2.58 < N < 2.58) = 0.99$
 - Como $z = (x - 0) / 0.45$ entonces $x = 2.58(0.45) = 1.16$

Figure 4-17 Determining the value of x to meet a specified probability.



Ejemplo

- Suponga que en una celda de telefonía celular, el campo eléctrico de la señal emitida por la estación base (denotado por E) se distribuye en forma Gaussiana sobre el terreno. Suponga que se tiene un campo eléctrico medio de 40dB y una desviación típica de 8.3dB
- Se desea conocer:
 - El porcentaje de ubicaciones en que se rebasan los valores de 60dB y 30dB.
 - La probabilidad de una disminución respecto de la media de 35dB.
 - El valor de E que es rebasado con probabilidades del 90% (décilo inferior) y del 10% (décilo superior).



Solución

E>60dB:

- Estandarización:
$$Z = \frac{E - \mu}{\sigma} = \frac{E - 40}{8.3}$$
- Porcentaje de ubicaciones que superan 60dB:

$$Z = \frac{60 - 40}{8.3} = 2.41$$

Lo que se pide es $P(z > 2.41) = 1 - P(Z \leq 2.41)$

De la tabla se extrae que:
 $P(z > 2.41) = 1 - 0.992 = 0.008$

Por tanto, el 0.8% de las ubicaciones rebasan los 60dB.

E>30dB:

- Estandarización:
$$Z = \frac{E - \mu}{\sigma} = \frac{E - 40}{8.3}$$
- Porcentaje de ubicaciones que superan 30dB:

$$Z = \frac{30 - 40}{8.3} = -1.2$$

Lo que se pide es $P(z > -1.2) = 1 - P(Z \leq -1.2) = P(Z \leq 1.2)$

De la tabla se extrae que:
 $P(z \leq 1.2) = 0.8849$

Por tanto, el 88.49% de las ubicaciones rebasan los 30dB

Ejemplo (continuación)

Probabilidad $E < (40-35)$

- Estandarización:

$$Z = \frac{E - \mu}{\sigma} = \frac{5 - 40}{8.3} = -4.22$$

- Probabilidad de ocurrencia:

$$P(z \leq -4.22) = 1 - P(z \leq 4.22) = 2.6 * 10^{-5}$$

E rebasado en el 10% de ubicaciones

- $P(Z > z) = 0.1 = 1 - P(z \leq 0.1)$

- $P(z \leq 0.1) = 1 - 0.1 = 0.9$

- De la tabla de la distribución normal estandar: $z = 1.28$

$$Z = \frac{E - \mu}{\sigma} = \frac{E - 40}{8.3} = 1.28$$

$$E = 50.62 \text{ dB}$$

- Nota: El resto del ejemplo se deja al lector

Aproximación de la distribución binomial a la Normal

- Cuando se cumple que

$$np > 5 \quad \text{y} \quad n(1-p) > 5$$

- Y n es grande en comparación con p .
- Una v.a. binomial X puede aproximarse a una v.a. normal estándar haciendo la transformación (estandarización):

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

- Esta transformación se hace reemplazando los valores de $\mu = np$ y $\sigma^2 = np(1-p)$ para la distribución binomial.

Aproximación de una v.a. de Poisson a una v.a. Normal

- Una v.a. con distribución de Poisson puede aproximarse a una v.a. con distribución normal estándar si $\lambda > 5$.

- La transformación (estandarización) se logra haciendo:
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

- La estandarización se hace teniendo en cuenta que para una distribución de Poisson:

$$\mu = E(X) = \lambda$$

$$\sigma^2 = V(X) = \lambda$$

DISTRIBUCION EXPONENCIAL

Relación con la v.a. de Poisson

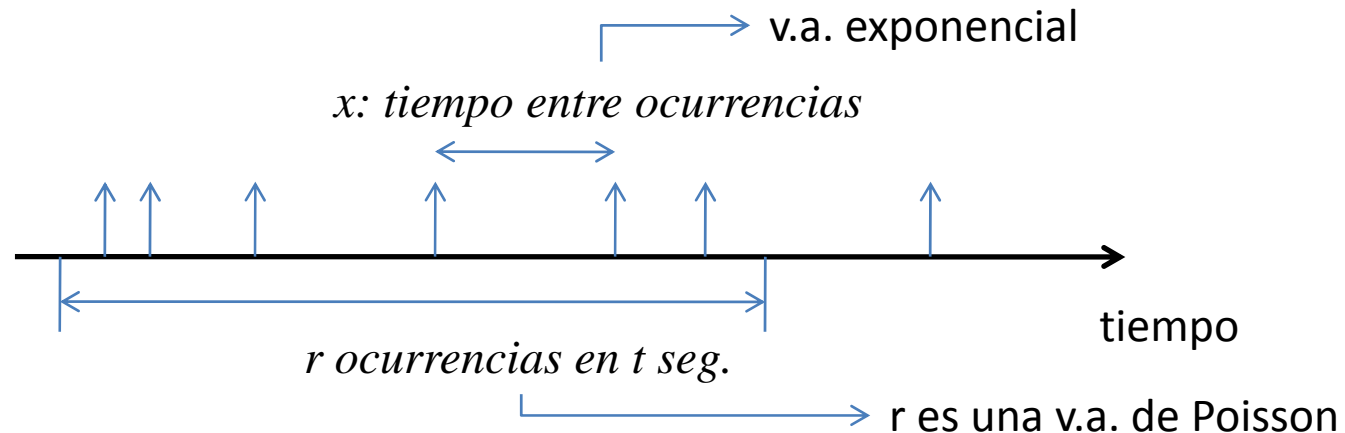
- Una v.a. con distribución de Poisson cuenta el número de ocurrencias de un evento (llegadas) en un intervalo de tiempo.
- Una v.a. con distribución exponencial cuenta la longitud (temporal o espacial) entre dos ocurrencias de un evento.

Relación con la v.a. de Poisson

- La v.a. X que es igual a la distancia entre conteos sucesivos de un proceso de Poisson con media $\lambda > 0$ tiene una **distribución exponencial** con parámetro λ . La función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

- Para $0 \leq x \leq \infty$
- **Ejemplo:** intervalo temporal



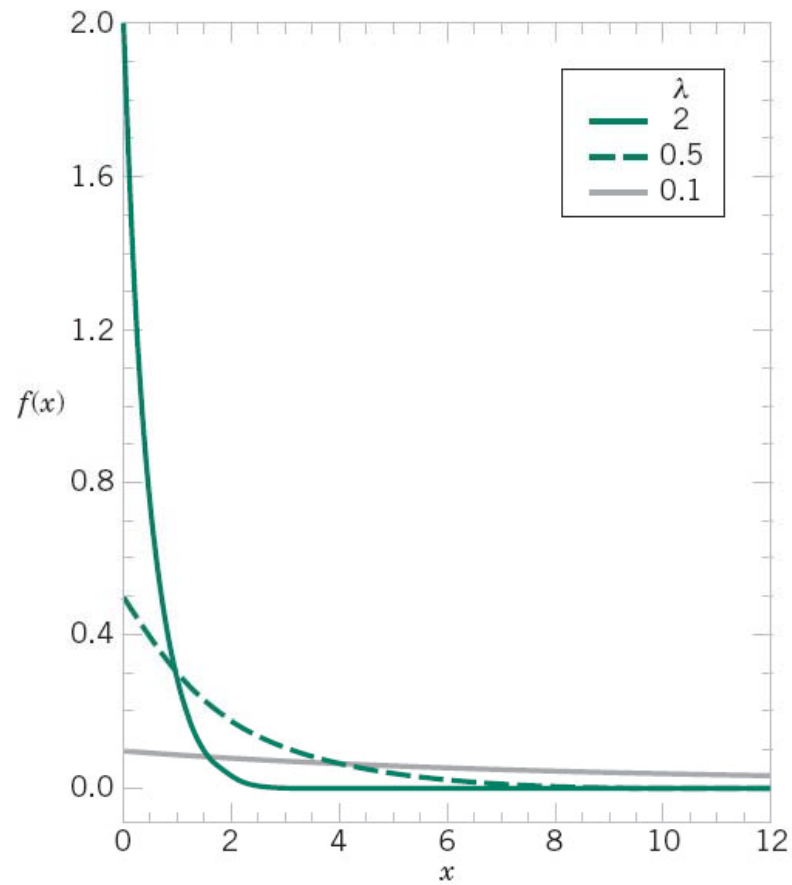
Media y Varianza

- Si la v.a. X tiene una distribución exponencial con parámetro λ , entonces

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Comportamiento para diferentes valores de λ



Ejemplo

- En una red de computadoras de una gran empresa, el acceso de usuarios al sistema puede modelarse como un proceso de Poisson con una media de 25 accesos por hora. Cuál es la probabilidad de que no haya accesos en un intervalo de 6 minutos (que el primer acceso ocurra después de 6 minutos)?

- **Solución:**

$\lambda=25$ accesos/hora

$x=6\text{min}=0,1\text{hora}$

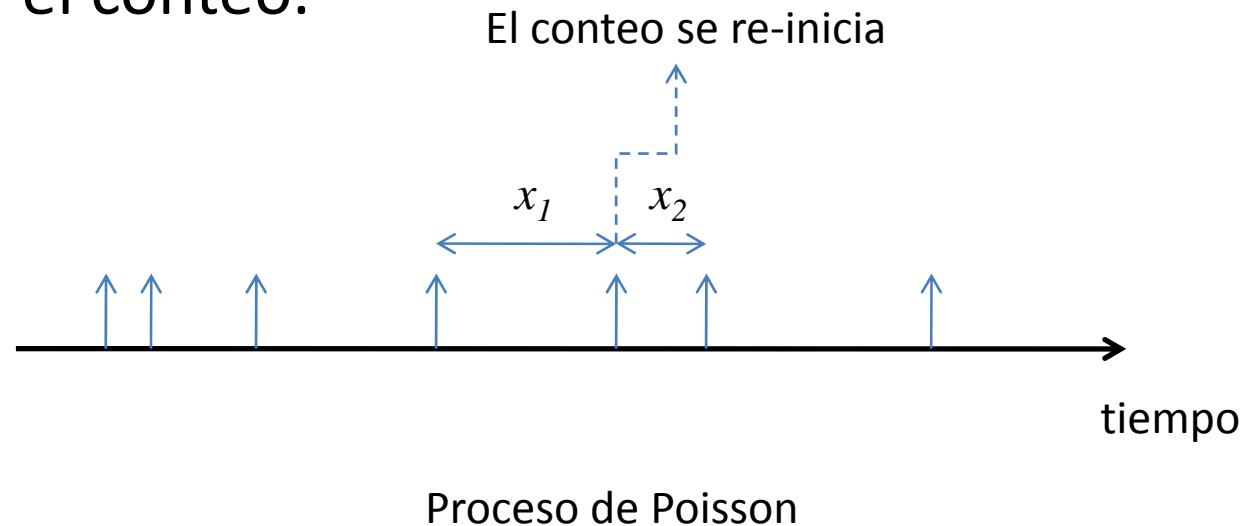
$$P(X > 0.1) = \int_{0.1}^{\infty} 25e^{-25x} dx = e^{-25(0.1)} = 0.082$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{25} = 0.04\text{horas}$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = 0.04\text{horas}$$

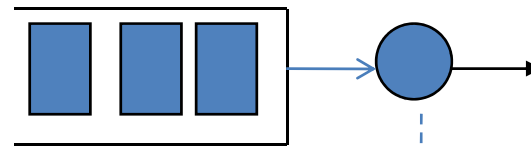
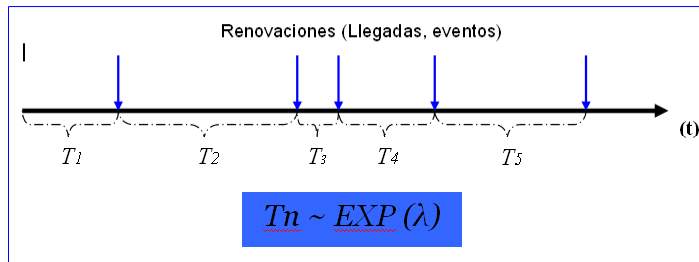
Propiedad de Falta de Memoria

- Una v.a. X con distribución exponencial también sufre de la propiedad de falta de memoria.
- Esta propiedad significa que la probabilidad de ocurrencia de un evento después de cierto tiempo (o distancia) no tiene en cuenta qué ocurrió antes de iniciar el conteo.



Aplicaciones de la distribución exponencial

- Medición del tiempo entre fallos de algún dispositivo (el dispositivo no se desgasta, por lo que el tiempo entre dos fallos no se afecta por los anteriores fallos)
- Aplicación en **teoría de colas** para modelar el tiempo entre llegadas de clientes a una cola.



Servidor (distribución exponencial)
Tasa de servicio: μ elementos/seg

Cola M/M/1

DISTRIBUCION DE ERLANG

Relación con la distribución exponencial

- Una v.a. exponencial mide la distancia (tiempo, longitud, etc) hasta que ocurre el primer conteo de un proceso de Poisson
- Una v.a. de Erlang mide la distancia hasta que ocurran r conteos en un proceso de Poisson.

Definición

- La v.a. X que es igual a la longitud del intervalo hasta que suceden r ocurrencias en un proceso de Poisson con media $\lambda > 0$ tiene una **distribución de Erlang** con parámetros λ y r . La función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}$$

- Para $x > 0$ y $r = 1, 2, \dots$

Ejemplo

- Las fallas de las unidades de procesamiento central (CPU) de los sistemas de computadores grandes se modelan con frecuencia como un proceso de Poisson. Por lo general, las fallas no son causadas por desgaste sino por otros factores. Suponga que las unidades que fallan se reparan de inmediato y que el número promedio de fallas por hora es de 0.0001. Sea que X denote el tiempo hasta que ocurren 4 fallas en un sistema. Determine la probabilidad de que X exceda 40000 horas.

- **Solución:**

$x=40000$ horas

$\lambda=0.0001$ fallas/hora

$r=4$ fallas

$$P(X > 40000) = \int_{40000}^{\infty} \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} = 0.433$$

Media y Varianza

- Si X es una v.a. de Erlang con parámetros λ y r , entonces la media y la varianza de X son

$$\mu = E(X) = \frac{r}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{r}{\lambda^2}$$

- Lo anterior se debe a que una v.a. de Erlang puede verse como la suma de r v.a. exponenciales.

