

El proceso de Poisson

Jhon Jairo Padilla A., PhD.

El proceso de Poisson

- ▶ Es el proceso puntual más importante
- ▶ Tiene un rol muy importante, equivalente al de la distribución normal dentro de las distribuciones estadísticas.
- ▶ Por el teorema del límite central, obtenemos una distribución normal cuando sumamos variables aleatorias.
- ▶ De manera similar, obtenemos la distribución exponencial cuando superponemos procesos estocásticos puntuales.
- ▶ La mayoría de los procesos puntuales son generalizaciones o modificaciones del proceso de Poisson.
- ▶ Este proceso da una muy buena descripción de muchos procesos de la vida real.
- ▶ Esto se debe a que el proceso de Poisson es el proceso más aleatorio. Entre más complejo sea el proceso, será modelado de manera más cercana por el proceso de Poisson.



Características del proceso de Poisson

- ▶ El proceso de Poisson es,
 - ▶ Estacionario
 - ▶ Independiente en todos los instantes de tiempo
 - ▶ Simple
- ▶ Las dos últimas características son fundamentales.
- ▶ La primera característica no es indispensable. Podría existir un proceso de Poisson que tenga intensidad dependiente en el tiempo.
- ▶ El proceso de Poisson puede representarse:
 - ▶ Por número: El número de eventos dentro de un intervalo de longitud fija tiene una distribución de Poisson.
 - ▶ Por Intervalo: La distancia en tiempo X_i entre eventos consecutivos es exponencialmente distribuida.

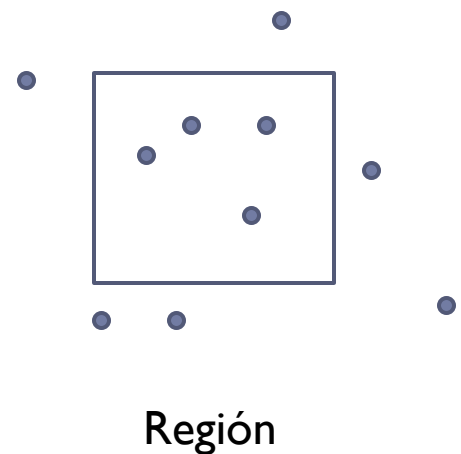
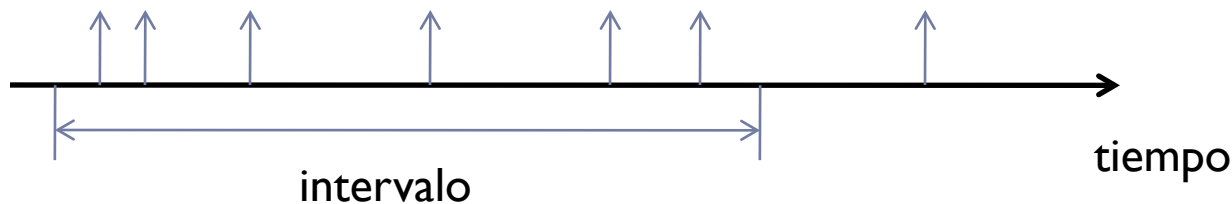


Definición

- ▶ La distribución de probabilidad de la v.a. de Poisson X , que representa el número de resultados que ocurren en un intervalo dado o región específicos (t) y que se puede representar como λt , es

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}$$

- ▶ Donde λ es el número promedio de resultados por unidad de tiempo, distancia, área o volúmen.



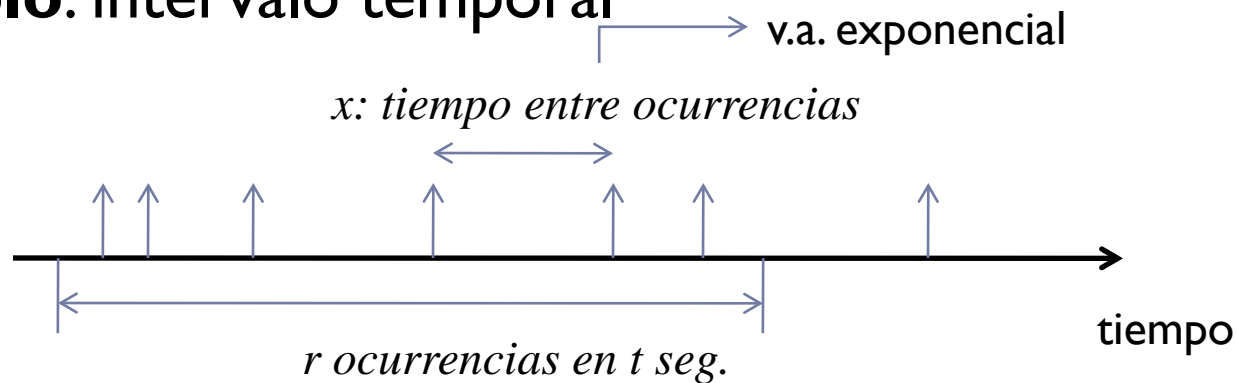
Relación con la distribución exponencial

- ▶ La v.a. X que es igual a la distancia entre conteos sucesivos de un proceso de Poisson con media $\lambda > 0$ tiene una **distribución exponencial** con parámetro λ . La función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

- ▶ Para $0 \leq x \leq \infty$

- ▶ **Ejemplo:** intervalo temporal



- ▶ r es una v.a. de Poisson

Relación del proceso de Poisson con la distribución Erlang

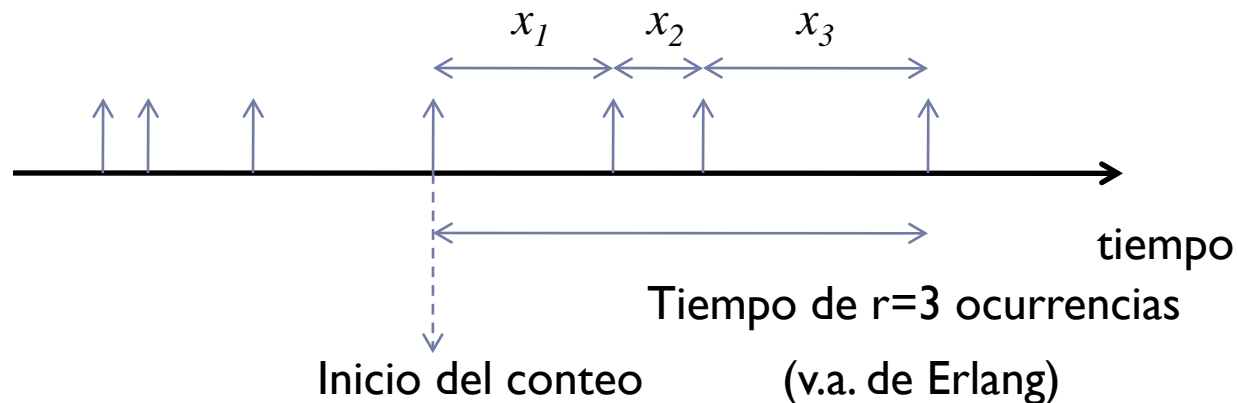
$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \cdot e^{-\lambda t} = \int_{x=t}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = 1 - F(t)$$

Distribución
acumulada de
Poisson

Distribución de Erlang

Probabilidad de supervivencia para una distribución Erlang (complemento de la distribución acumulada)

- ▶ Como se mencionó antes, una v.a. de Erlang puede verse como la suma de r v.a. exponenciales.



Aplicaciones de las distribuciones

Distribución	Aplicación
Exponencial	Tiempos entre llegadas de llamadas, cuando el tráfico es generado por seres humanos
Erlang-k	Tiempo que transcurrió para que llegaran k llamadas
Poisson	Número de llamadas en un sistema telefónico Trabajos en un sistema computacional



Ejemplo

- ▶ Suponga que llegan llamadas a una central telefónica SPC (Stored Program Controlled) de acuerdo con un Proceso de Poisson. La central recolecta información automáticamente por cada 1000 llamadas.
- ▶ Los tiempos entre dos registros tendrán una distribución Erlang-1000.



Ejemplo: Sistema satelital con Aloha Ranurado

- ▶ Consideremos un sistema de comunicaciones satelitales con una longitud de paquetes constante, h .
- ▶ El satélite está ubicado en una órbita geoestacionaria a 36.000 Km sobre el Ecuador, por lo que el tiempo de ida y vuelta (round trip time) es 280ms.
- ▶ El tiempo de la comunicación está dividido en ranuras de duración fija, correspondiente a la longitud del paquete (h).
- ▶ Una estación terrena individual transmite paquetes que están sincronizados con las ranuras de tiempo.
- ▶ En el satélite, todos los paquetes que se reciben durante una ranura de tiempo son transmitidos en la siguiente ranura.
- ▶ La transmisión de un paquete es correcta sólo si éste es el único paquete transmitido durante la ranura de tiempo.
- ▶ Si hay más paquetes transmitidos simultáneamente, habrá una colisión y todos los paquetes se perderán y deberán ser retransmitidos.
- ▶ Todas las estaciones terrenas reciben todos los paquetes transmitidos por el satélite. Así, pueden decidir si un paquete ha sido recibido correctamente.
- ▶ Debido al tiempo de retardo, las estaciones terrenas transmiten paquetes independientemente.



Ejemplo: Sistema satelital con Aloha ranurado

- ▶ Bajo estas condiciones se puede suponer un proceso de llegadas de Poisson, con una tasa de llegadas λ .
- ▶ Por tanto, la probabilidad de que lleguen i paquetes en una ranura de tiempo está dada por,

$$p(i) = \frac{(\lambda h)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda h}$$

- ▶ Por tanto, la probabilidad de que haya una transmisión correcta sería la probabilidad de que sólo llegue un paquete (no hay colisión). Esta se calcula como,

$$p(1) = \lambda h \cdot e^{-\lambda h}$$

- ▶ Que correspondería al porcentaje del tiempo que hay una transmisión efectiva.
-



Ejemplo: Sistema satelital con Aloha ranurado

- ▶ Si quisieramos hallar el valor en que la función $p(l)$ se hace máxima, es decir, el máximo rendimiento que puede obtener, debemos obtener el máximo cuando variamos el producto λh :

$$p'_{\lambda h}(1) = e^{-\lambda h} \cdot (1 - \lambda h) = 0$$

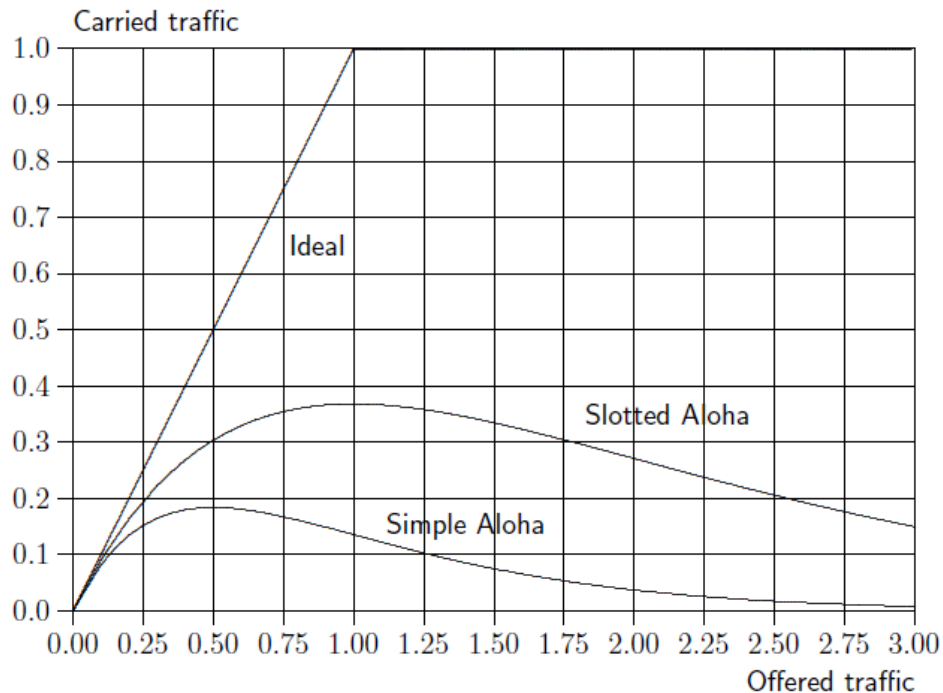
$$\lambda h = 1.$$

- ▶ Si reemplazamos el valor de λh calculado, obtendremos el máximo rendimiento posible en la comunicación:

$$\max\{p(1)\} = e^{-1} = 0.3679$$



Comparación de Aloha ranurada con Aloha



- ▶ Siguiendo un procedimiento similar, se puede obtener el rendimiento de Aloha simple y se pueden comparar los rendimientos máximos obtenidos con las dos estrategias de acceso al medio.
- ▶ Se observa que Aloha ranurado puede alcanzar un mayor rendimiento que Aloha simple.



Relación con la distribución binomial

- ▶ La probabilidad de una v.a con distribución binomial tiene la forma:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

- ▶ Si n se incrementa y p se hace muy pequeña, de manera que se mantenga siempre el producto $pn = kte = \lambda$ (**este producto es la media**), entonces

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

- ▶ Por tanto, cuando n es muy grande, tiende a una distribución de Poisson:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$



Analogía de los procesos de Poisson y Binomial

BINOMIAL PROCESS Discrete time Probability of success: p , $0 < p < 1$	POISSON PROCESS Continuous time Intensity of success: λ , $\lambda > 0$
Number of attempts since previous success or since a random attempt to get a success	Interval between two successes or from a random point until next success
GEOMETRIC DISTRIBUTION $p(n) = p \cdot (1-p)^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$ $m_1 = \frac{1}{p}$, $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$	EXPONENTIAL DISTRIBUTION $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ $m_1 = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
Number of attempts to get k successes	Time interval until k 'th success
PASCAL = NEGATIVE BINOMIAL DISTR. $p(n k) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$, $n \geq k$ $m_1 = \frac{k}{p}$, $\sigma^2 = \frac{k(1-p)}{p^2}$	ERLANG-K DISTRIBUTION $f(t k) = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ $m_1 = \frac{k}{\lambda}$, $\sigma^2 = \frac{k}{\lambda^2}$
Number of successes in n attempts	Number of successes in a time interval t
BINOMIAL DISTRIBUTION $p(x n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \dots$ $m_1 = pn$, $\sigma^2 = pn \cdot (1-p)$	POISSON DISTRIBUTION $f(x t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} \cdot e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ $m_1 = \lambda t$, $\sigma^2 = \lambda t$

- ▶ La distribución exponencial es la única distribución continua con falta de memoria. Es la base para construir procesos de Poisson.
- ▶ La distribución geométrica es la única distribución discreta con falta de memoria. Es la base para construir procesos Binomiales.

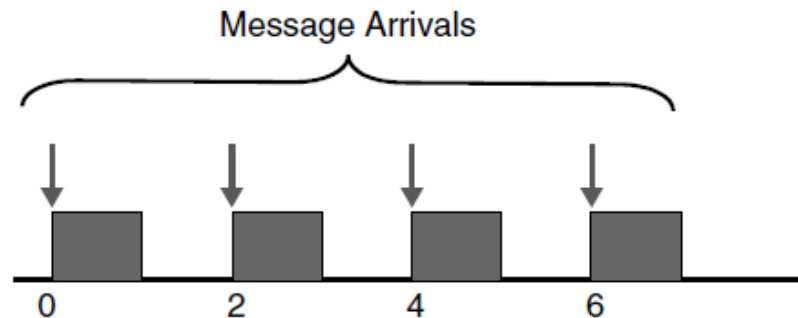
Propiedades del proceso de Poisson

- ▶ El proceso de Poisson es el proceso más aleatorio que se puede encontrar (proceso de máximo desorden).
- ▶ El proceso de Poisson da una buena descripción de un proceso físico cuando hay muchos factores diferentes detrás de él.
- ▶ Posee la propiedad PASTA: Poisson Arrivals See Time Averages



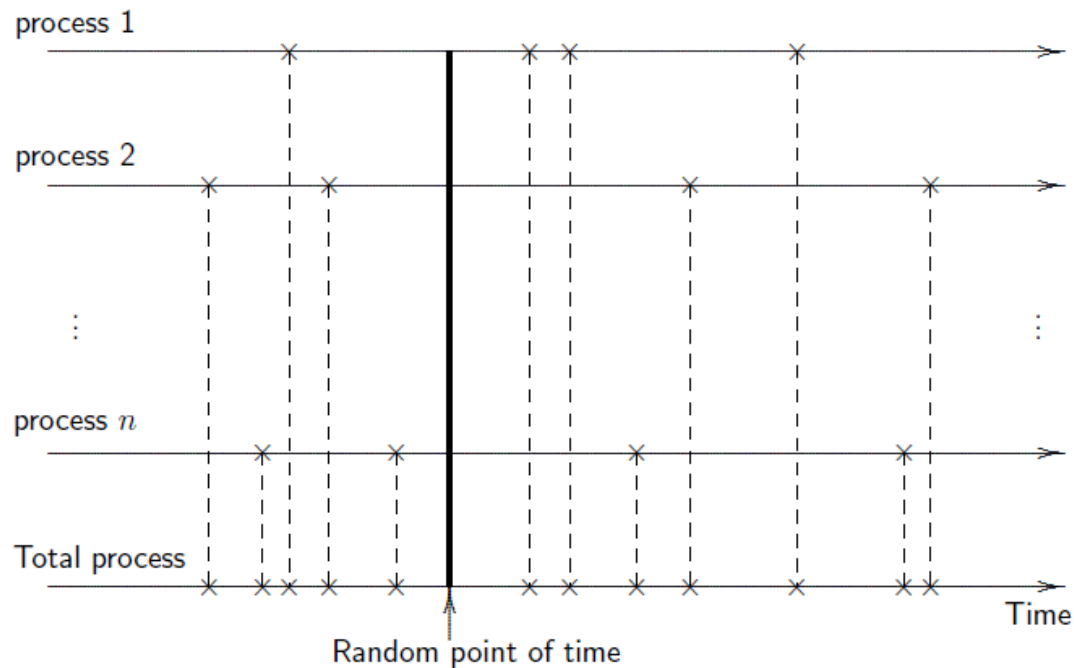
Propiedad PASTA

- ▶ Para el proceso de Poisson, la distribución de clientes en el sistema que es vista por un cliente que llega es típica en el sentido de que siempre se ve el valor medio de clientes en cola en instantes de tiempo elegidos aleatoriamente.
- ▶ Ejemplo:
 - ▶ Supónganse llegadas periódicas a un sistema cada 2 segundos. Cada llegada es servida en 1 segundo y sale del sistema.
 - ▶ Claramente, cada cliente que llega ve el sistema vacío. Sin embargo, el sistema está ocupado la mitad del tiempo y esto podría ser observado por observaciones aleatorias.



Propiedad de Superposición (Teorema de Palm)

- ▶ Si se superponen varios procesos puntuales independientes, el proceso total que da como resultado será localmente un proceso de Poisson.
- ▶ Término “Local”: Se consideran intervalos muy cortos y cada proceso contribuye como máximo con un evento durante este intervalo.



Propiedad de descomposición (Teorema de Raikov)

- ▶ Si se hace una descomposición aleatoria de un proceso puntual en varios sub-procesos, los procesos individuales convergen a un proceso de Poisson, siempre que la probabilidad de que un evento pertenezca a el mismo subproceso tienda a cero.



Traslación

- ▶ Es el desplazamiento de los eventos individuales.
- ▶ Cuando una traslación para cada evento es una variable aleatoria, independiente de los otros eventos, un proceso puntual arbitrario convergerá a un proceso de Poisson.



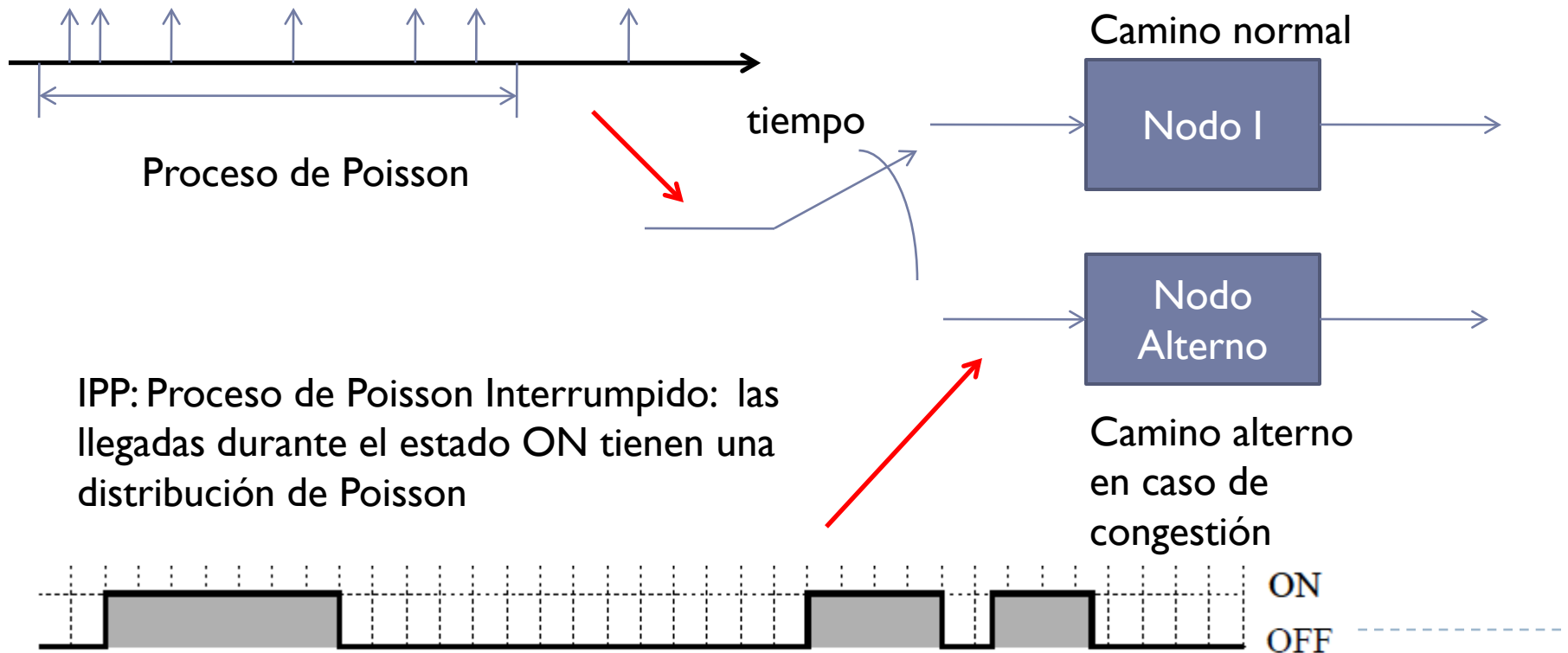
Generalizaciones del Proceso estacionario de Poisson

- ▶ El proceso de Poisson ha sido generalizado de varias maneras.
- ▶ Algunas son:
 - ▶ IPP: Interrupted Poisson Process
 - ▶ MMPP: Markov Modulated Poisson Processes
 - ▶ MAP: Markov Arrival Processes



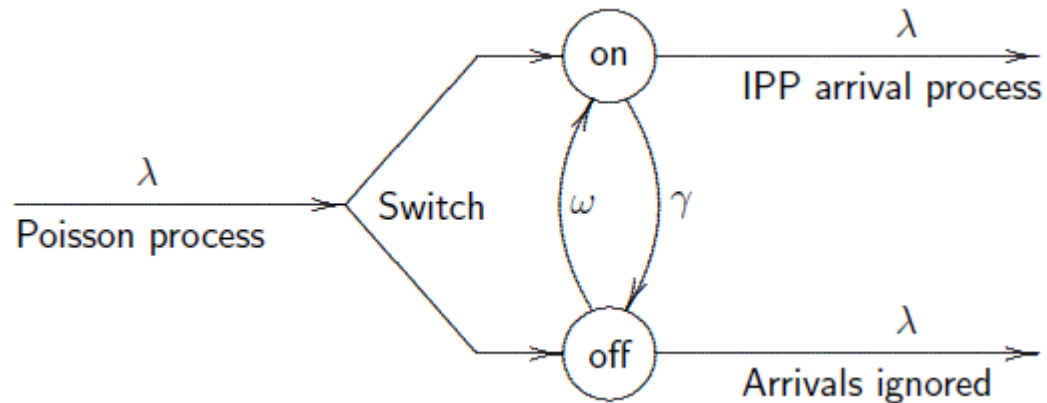
IPP: Interrupted Poisson Process

- ▶ Fue propuesto por Kuczura (1973) y es ampliamente usado.
- ▶ La aplicación original fue para el problema del rebalaje:



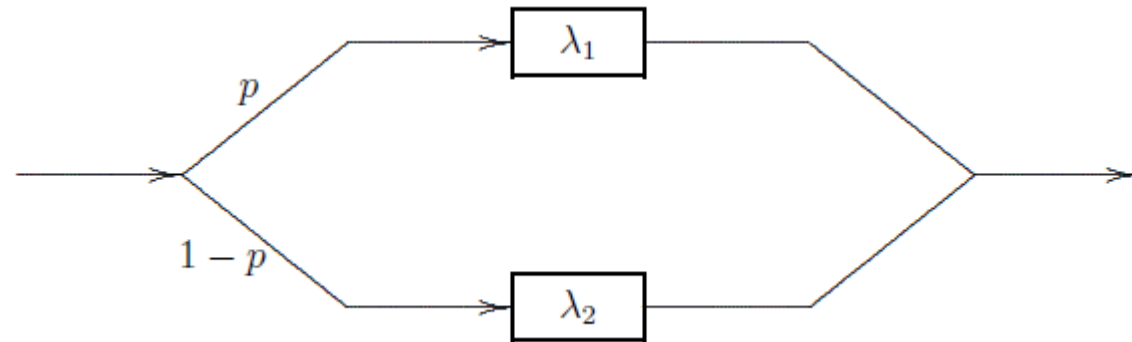
Modelo del IPP

- ▶ Kuczura modeló los intervalos on y off mediante intervalos de tiempo con intensidades γ y ω respectivamente.
- ▶ Este modelo también sirve para modelar el tráfico de paquetes generados por la voz (off: silencios; on: habla)



Modelo del IPP

- ▶ Kuczura también demostró que esto corresponde tiempos entre-llegadas distribuidos hiperexponencialmente.



- ▶ Puede demostrarse que los parámetros están relacionados así:

$$\lambda = p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2,$$

$$\lambda \cdot \omega = \lambda_1 \cdot \lambda_2,$$

$$\lambda + \gamma + \omega = \lambda_1 + \lambda_2.$$



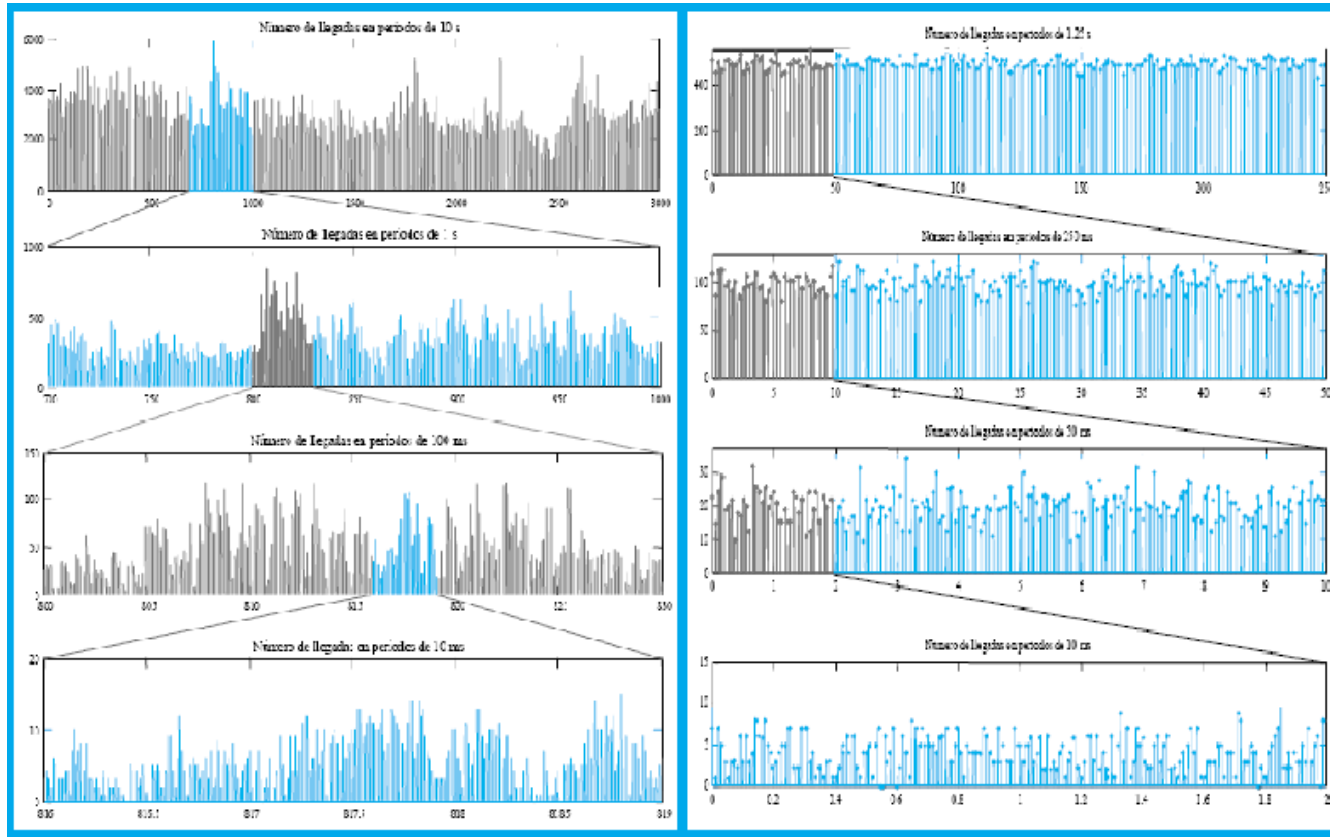
MMPP: Proceso de Poisson Modulado por Markov

- ▶ Es una generalización del proceso IPP.
- ▶ IPP es un MMPP de dos estados (on/off)
- ▶ Un proceso MMPP puede tener varios estados con diferentes tasas
- ▶ La utilidad del proceso MMPP puede utilizarse para modelar tráfico autosimilar.



Tráfico Auto-similar

Trafico observado en una red Ethernet (autosimilar) (a) y trafico obtenido de un procesó Poisson (no autosimilar) (b).



(a)

(b)

Fuente: Marco Aurelio Alzate Monroy, *Introducción al tráfico autosimilar en redes de comunicaciones*, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, revista de ingeniería Vol 6 No. 2 año 2001

Proceso autosimilar

- ▶ Un proceso estocástico $x(t)$ es estadísticamente autosimilar con parámetro H ($0.5 \leq H \leq 1$) si para todo real $a > 0$, el proceso $x(at)$ tiene las mismas propiedades estadísticas que $x(t)$. Esta relación puede ser expresada por las siguientes tres condiciones:



- ▶ 1. $E[x(t)] = \frac{E\{x(at)\}}{a^H}$ Media

- ▶ 2. $Var[x(t)] = \frac{Var[x(at)]}{a^{2H}}$ Varianza

- ▶ 3. $R_x(t, s) = \frac{R_x(at, as)}{a^{2H}}$ Auto correlación



Procesos Discretos Autosimilares

- ▶ Una manera de ver la serie agregada de tiempo es verla como una técnica para comprimir la escala de tiempo. Podemos considerar $x^{(2)}$ como una mayor magnificación o mayor resolución posible para esta serie de tiempo. El proceso $x^{(3)}$ es el mismo proceso reducido en su magnificación por un factor de 3. Promediando sobre cada grupo de tres puntos perdemos el detalle fino disponible a la mayor magnificación.
- ▶ Podemos también ver cada punto en la serie $x^{(m)}$ como un promedio de tiempo del proceso x para m muestras.
- ▶ Si la estadística del proceso (media, varianza, correlación, etc.) se conserva con la compresión, estamos tratando con un proceso auto similar.



Procesos Discretos Autosimilares

- ▶ Se dice que un proceso s es exactamente autosimilar con parámetro β ($0 < \beta < 1$) si para todo $m = 1, 2, \dots$, tenemos:

- ▶ $Var\{x^{(m)}\} = \frac{Var(x)}{m^\beta}$ Varianza

- ▶ $R_{x^{(m)}}(k) = R_x(k)$ Autocorrelación

- ▶ Nota: $\beta = 2(1 - H)$

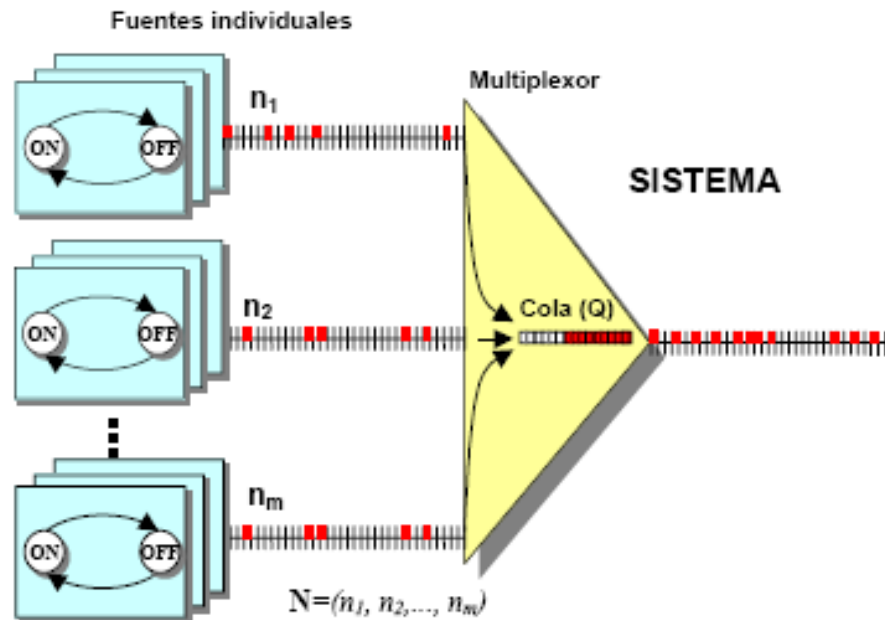


Parámetro Hurst

- ▶ El valor de H , conocido como el parámetro H , o el parámetro de auto-similaridad, es una medida clave de la auto-similaridad. Más precisamente, H es una medida de la persistencia de la dependencia de largo rango del proceso estocástico.
- ▶ Un valor de $H = 0.5$ indica ausencia de autosimilaridad. Cuanto más cerca de 1 esté H , mayor el grado de persistencia y de la dependencia de largo rango.



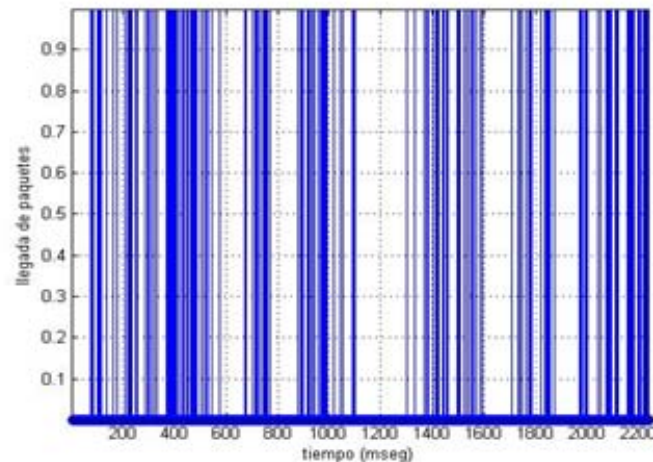
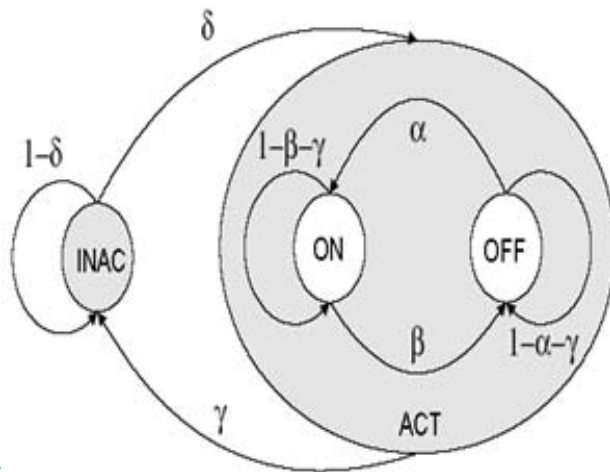
Generación de tráfico autosimilar utilizando MMPP



- ▶ Fuente. Jurado, E. Casilari, A. Reyes, A. Díaz-Estrella y F. Sandoval, *Modelado Markoviano de Tráfico Agregado ATM*, Dpto. Tecnología Electrónica, E.T.S.I. Telecomunicación, Universidad de Málaga, 1999
-

Generación de tráfico autosimilar utilizando MMPP

- ▶ Otra forma es utilizar una variante denominada D-MMPP
- ▶ El modelo d-MMPP (d procesos MMPP de dos estados, o dos procesos IPP) combina la simplicidad de la conmutación markoviana con la de la generación Poissoniana.
- ▶ Este modelo es desarrollado como una aproximación del tráfico real de internet, el cual posee características autosimilares.



Cálculo del parámetro Hurst

Un de las técnicas mas utilizadas es el diagrama varianza-tiempo. En efecto, tomando la condición de autosimilaridad: $Var\{x^{(m)}\} = \frac{Var(x)}{m^\beta}$

Obtenemos:

$$Var[X^{(m)}] = m^\beta Var[X]$$

$$\beta = 2(1 - H)$$

Tomando el logaritmo a cada lado de la ecuación obtenemos:

$$\log(Var[X^{(m)}]) = \log(Var[X]) - \beta \log(m)$$

de manera que al graficar $\log(Var[x^{(m)}])$ contra $\log(m)$

obtenemos una curva cuya pendiente es $2(H - 1)$



Cálculo del parámetro Hurst

Cuando se tiene una serie de tiempo suficientemente larga como para estimar con suficiente precisión de las series agregadas para un amplio rango de valores m , se podrá construir una grafica. Si detectamos algún tipo de alineación con una pendiente entre -1 y 0 (ó $0.5 < H < 1$), podemos interpretarla como un fenómeno *autosimilar* y la pendiente (obtenida Regresión con Mínimos Cuadrados) resulta de la ecuación $2(H - 1)$

H=0.54965

Trafico D-MMPP

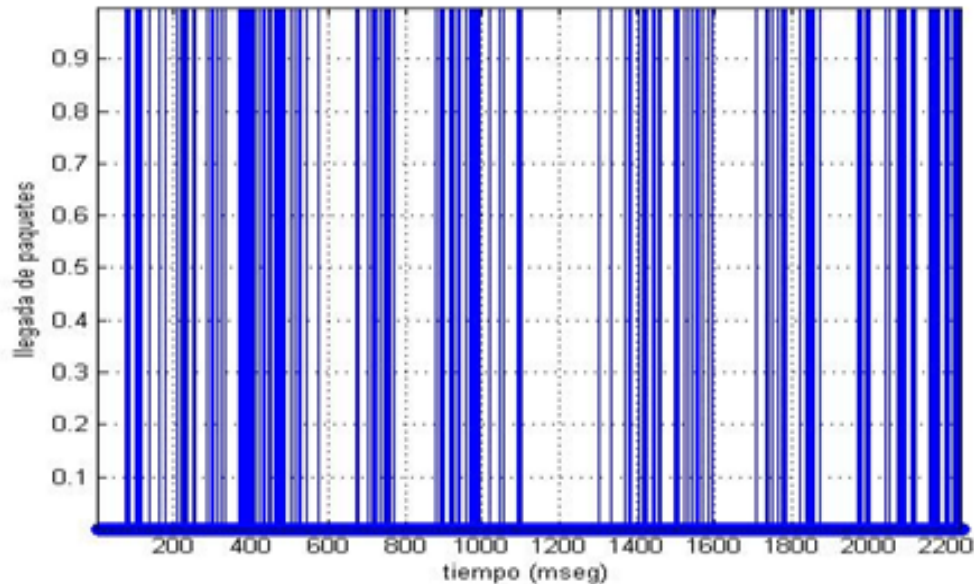


Diagrama Varianza-Tiempo

