Simulación Monte Carlo

Jhon Jairo Padilla Aguilar, PhD.

Introducción

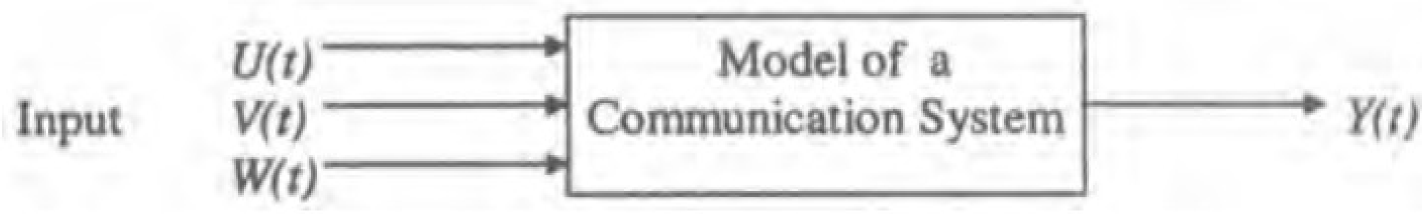
- La generación de números aleatorios fue usada primero para simular juegos de azar.
- La técnica de Simulación Monte Carlo toma su nombre de la ciudad de Monte Carlo por sus famosos Casinos.
- El término “Monte Carlo” proviene del nombre en clave de un trabajo secreto en el que von Neumann y Ulam emplearon esta técnica matemática (que ya era conocida anteriormente).
- Este trabajo se realizo en Los Alamos, durante el conocido proyecto para la fabricación de la bomba atómica.

Introducción

- La técnica de Monte Carlo básicamente involucra la simulación de un experimento aleatorio que usa medias artificiales sin involucrar el experimento físico.

Ejemplo de simulación Monte Carlo

- Supóngase un sistema de comunicaciones con señales de entrada U(t), V(t) y W(t), las cuales tienen un comportamiento aleatorio en el tiempo.
- Se tiene una señal Y(t) a la salida y se desea determinar el comportamiento de esta salida en el tiempo. Es decir, se quiere encontrar la descripción matemática del comportamiento aleatorio de Y(t).



Ejemplo de Simulación Monte Carlo

- Si resolvemos este problema usando los bloques constitutivos del sistema para que procesen las señales y obtenemos la evolución en el tiempo de todas las formas de onda en el sistema, tendremos una Simulación Monte Carlo Pura.
- Esto implica la generación de los valores muestreados de todos los procesos de entrada, dejando los modelos de los bloques funcionales en el sistema de comunicación operando sobre ellas, y observando las ondas de salida.

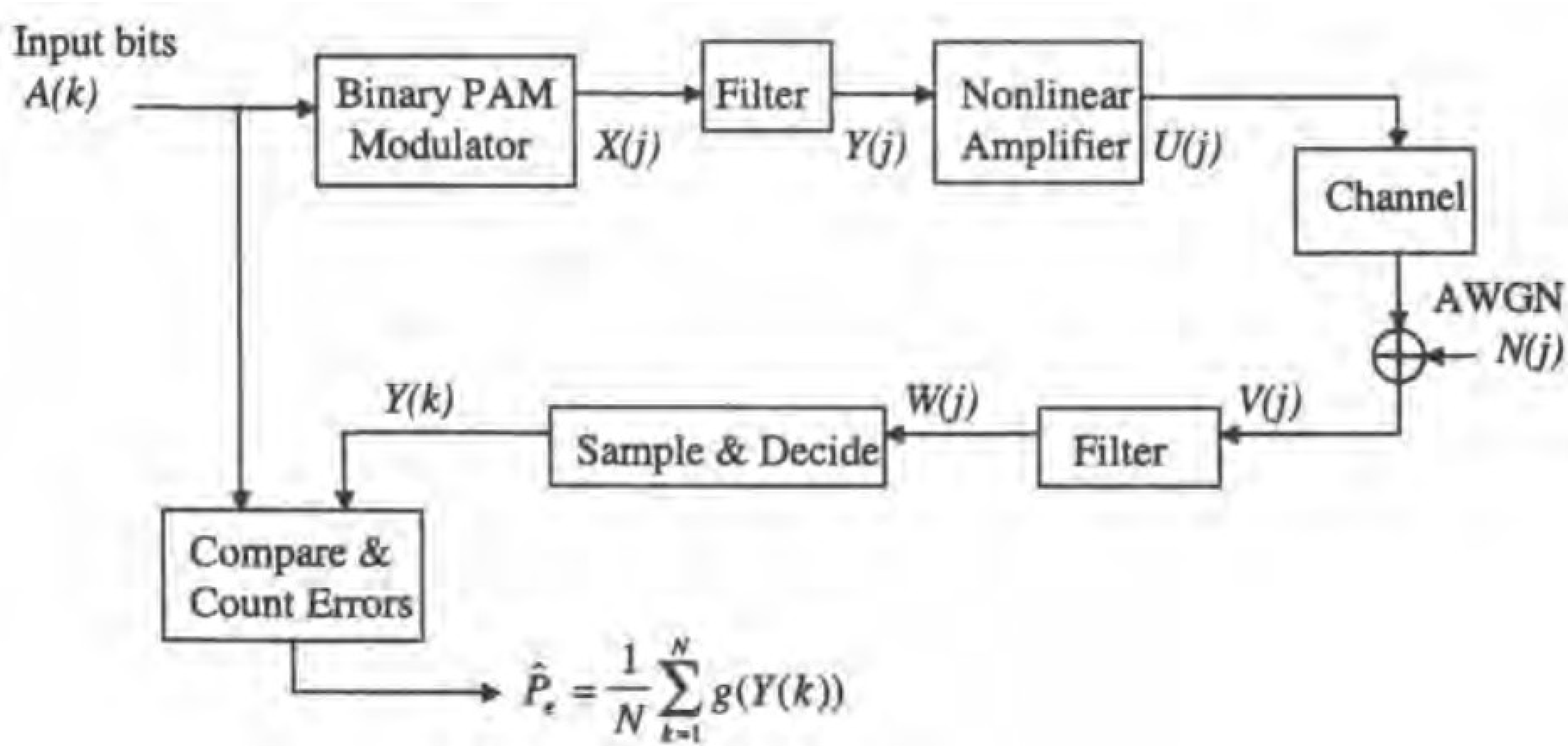
Ejemplo de Simulación Monte Carlo

- El valor esperado E{g(Y(t))} es estimado de la simulación Monte Carlo mediante la expresión:

$$E\{g(\hat{Y}(t)\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(Y(i))$$

- Donde N es el número de muestras simuladas y Y(t) con el gorrito es el valor estimado.

Procedimiento para estimar la tasa de error de bit



Procedimiento para estimar la tasa de error de bit

- Generar los valores de las muestras de los bits de secuencia de entrada {A(k)}, k=1,2,...,N, y las muestras de ruido {N(j)}, j=1,2,...,mN (la tasa de muestreo es m muestras por bit)
- Procesar estas muestras a través de los modelos de los bloques funcionales y generar la secuencia de salida Y(k).
- Estimar E(g(Y(k))) como $\hat{P}_e = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g(Y(k))$
-
- Donde g(Y(k))=1 si Y(k) >< A(k), y g(Y(k))=0 si Y(k) = A(k)

Precisión de las simulaciones

- La aproximación de las estimaciones obtenidas mediante simulación Monte Carlo dependerá del procedimiento de estimación usado, el tamaño de la muestra N, la capacidad de reproducir los valores de muestras de los procesos de entrada de forma precisa, los supuestos de modelado y las aproximaciones.

Variantes de la Simulación Monte Carlo

- Monte Carlo: Al menos un proceso aleatorio emulado
- Monte Carlo Puro: Todos los procesos de entrada son emulados
- Monte Carlo Parcial ó Cuasi Analítica: Sólo algunos procesos de entrada, pero no todos, son simulados, mientras que los efectos de otros procesos son manejados usando expresiones analíticas. Es especialmente útil para sistemas lineales y otros casos.

Ejemplo: Estimación del número pi

- Alrededor de 1733, George Louis Leclerc describió un experimento para estimar el valor del número π (Experimento de la aguja de Buffon)
- Si se lanza una aguja de longitud l sobre una mesa pintada con líneas paralelas, con un espaciado entre ellas d (donde d ≥ l), entonces la probabilidad de que la aguja corte una línea es:

$$p = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot d}$$

Ejemplo: Estimación del número pi

Puede, por tanto, plantearse el siguiente experimento para estimar el numero π:

1.. Conseguir una aguja y pintar las líneas sobre la mesa.

2. Decidir cuantas veces va a lanzarse la aguja. Sea N el numero de veces.

3. Poner un contador a cero.

4. Repetir N veces las dos acciones siguientes:

   a) Lanzar la aguja “aleatoriamente” sobre la mesa.

   b) Si la aguja cruza alguna de las líneas, incrementar el contador en uno. Si la aguja no cruza ninguna línea, el contador no varía.

5. Calcular la proporción de veces que la aguja ha cruzado alguna línea:

$$\hat{p} = \frac{\text{valor final del contador}}{N}$$

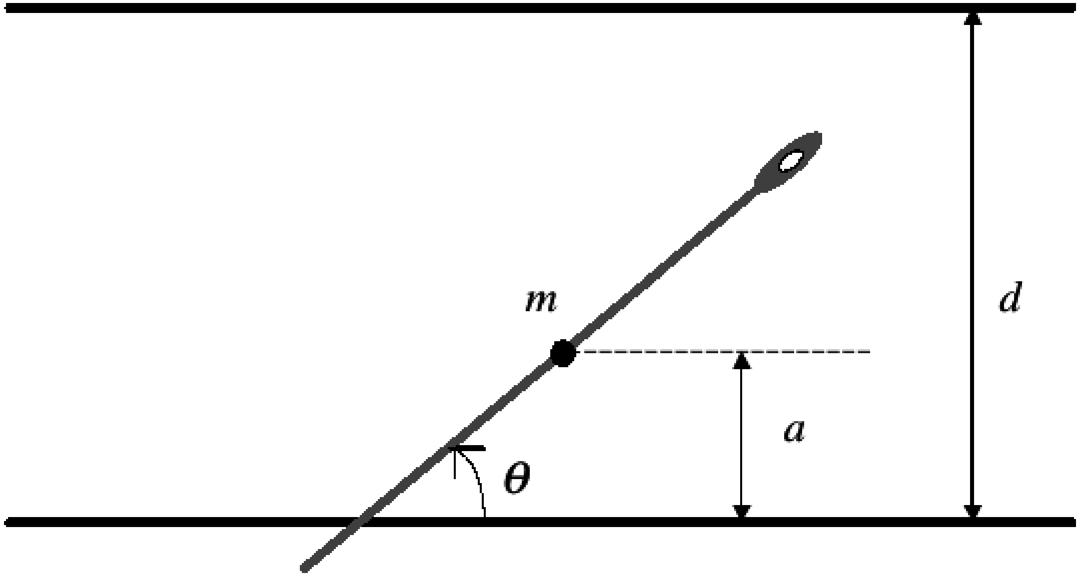
6. Si p > 0, entonces estimar el número π de la forma siguiente:

$$\hat{\pi} = \frac{2 \cdot l}{\hat{p} \cdot d}$$

Comentarios sobre el ejemplo

- Como vemos, el experimento de la aguja de Buffon es un ejemplo de método de Monte Carlo, ya que se están empleando números aleatorios para estimar el valor de cierta propiedad.
- Para simular mediante el computador este experimento, debemos ser capaces de situar la posición de la aguja aleatoriamente entre las líneas paralelas. Cuando se realiza el experimento físicamente, esto no constituye un problema, ya que simplemente lanzamos la aguja, vemos donde a caído y anotamos si corta alguna línea o no.

Experimento de la aguja de Buffon: Simulación por computador



Generación de variables aleatorias de entrada

- A partir de las siguientes dos consideraciones, puede obtenerse un procedimiento para determinar si la aguja corta alguna línea:
  - Una vez fijada la posición del punto medio de la aguja, m, debe determinarse cuál de las dos líneas es la más cercana a este punto medio. Sea a la distancia entre el punto medio de la aguja y la línea más cercana. Esta distancia a es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo [0, d] .
  - Debido a la simetría, el ángulo que forma la aguja respecto a las líneas paralelas, θ, es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[0, \pi]$.

Proceso que se sigue con las entradas aleatorias

- Una vez obtenidos los valores de a y θ, puede seguirse el siguiente procedimiento para decidir si la aguja toca o intersecta la línea mas próxima al centro de la aguja:
  - Si a ≤ (1/ 2) l · sin (θ), entonces la aguja toca o corta la línea.
  - Si a > (1/2) l · sin (θ), entonces la aguja ni toca ni corta la línea.
- Las muestras aleatorias a y θ pueden obtenerse a partir de números seudo aleatorios, u1 y u2 , de la forma siguiente:

$$a = \frac{d}{2} \cdot u_1$$

$$\theta = \pi \cdot u_2$$

- donde u1 y u2 son observaciones de una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo [0, 1].

Algoritmo para simulación

El flujo del programa para simular el problema de la aguja de Buffon es el siguiente:

- Paso 1: Inicializar Ncorta = n = 0, contadores del numero de veces que la aguja corta o toca la línea y del numero de lanzamientos respectivamente.
- Paso 2: Seleccionar l y d. Seleccionar Ntotal , que es el numero total de lanzamientos de la aguja.
- Paso 3: Generar dos números seudo aleatorios, u1 y u2.
- Paso 4: Calcular a y θ, empleando las Ecuaciones respectivas.
- Paso 5: Si a > (1/2) l · sin (θ) , entonces saltar al Paso 7.
- Paso 6: Incrementar Ncorta .
- Paso 7: Incrementar n.
- Paso 8: Si n > Ntotal , entonces ir al Paso 9. En caso contrario, ir al Paso 3.
- Paso 9: Calcular e imprimir el resultado:

$$\hat{\pi} = \frac{2 \cdot l}{\frac{N_{\text{corta}}}{N_{\text{total}}} \cdot d}$$

Ejemplo de una corrida de la simulación

- Este algoritmo puede programarse usando cualquier lenguaje de programación.
- Por ejemplo, ejecutando el programa con las siguientes entradas: l = 10, d = 20 y N total = 3000, y empleando una determinada secuencia de números aleatorios, se obtiene la siguiente estimación de la probabilidad de que la aguja toque o corte una línea:

$$\hat{p} = \frac{N_{\text{corta}}}{N_{\text{total}}} = 0.3133$$

- Por tanto, el valor de pi simulado será: 3,191828 (que no es el valor de pi exacto)